ALEXANDRI ANDERSONI

ABERDONENSIS SVPPLEMENTVM APOLLONII REDIVIVI.

ſiue,

Analyſis problematis hactenus deſiderati ad Apollonij Pergæi doctrinam περὶ νεύσεων, à Marino Ghetaldo Patritio Raguſino hucuſque, non ita pridem reſtitutam.

IN QVA

Exhibetur Mechanice æqualitatum tertij gradus ſiue ſolidarum, in quibus magnitudo omnino data, æquatur homogeneæ ſub altero tantum coefficiente ignoto.

HVIC

Subnexa eſt variorum problematum practice, eodem Auctore.

PARISIIS,

Apud HADRIANVM BEYS, via Iacobæa.

ANNO CIↃ, IↃC. XII.

15 februarij 1643. Parisijs

De Chambray.

περὶ τῆς τῶν ὄντων πηλικότητος καὶ ποσότητος ἡ μαθηματική.
circa existentium aliquantitatem et mensuram mathematica.

ζητημάτων καὶ προβλημάτων.
quaestionum et objectionum —

In titulo libri

περὶ νεύσεων id est

de Inclinatis, nutantibus, vergentibus, propendentibus.

LECTORI ΦΙΛΟΜΑΘΕΙ.

Περὶ τῆς τῶν ὄντων πηλικότητος καὶ ποσότητος, ἡ μαθηματική: hinc copioſus ζητημάτων καὶ προβλημάτων prouentus, quibus ſoluendis, varia priſci mathematici (vt teſtatur Pappus Alexandrinus, ſub initium libri ſeptimi συναγωγῆς μαθηματικῆς.) & varij ſubiecti congeſſere problemata, indeque τόπον ἀναλυόμενον dixere, quæ pene omnia, edax rerum tempus deleuerat: ſed quorundam illuſtrium in hac arte opera, pleraque è tenebris iam eruta, & Analytice purior, ſimplicior, ac facilior quam antea vnquam prodijt. (quod vero in hoc ſtudiorum genere ſubtiliſſimo Franciſco Vietæ debemus, ac debebunt quotquot in poſterum futura ſæcula.) ſed quum reſoluendo, quæſitum vt datum ponimus, & magnitudinum inter ſe comparatione operando, ad tertium rationis gradum aſcendimus, atque hîc æquamus magnitudinem omnino, datam homogeneæ ignotæ, ſiue omnino, ſiue ſub altero coefficiente noto, hactenus ἀγεωμέτρητοι ſubſtitimus: & illud quidem, non niſi duarum mediarum rationis continuæ inter duas datas rectas lineas inuentione (quod problema ſolidum adhuc æſtimatur.) abſolui poteſt: hoc autem quâ docui hoc primo lemmate, ratione, facile perficitur, in quo quicquid plurimum librorum qui ad ἀναλυόμενον τόπον ſpectabant, complexu continetur, (quos quidem alioqui quoties vſus expoſtulat, ad manus habere neceſſarium eſſet) incluſum, vbicunque vſus opuſve exigit, promptum habes & paratum, modo prima Analyticeſ elementa edoctus. & quoniam à viro præclaro, & mathematico exercitatiſſimo, Marino Ghetaldo Patritio Raguſino, in Apollonio ſuo rediuiuo ſiue reſuſcitatâ Apollonij Pergæi inclinationum doctrinâ, relictum eſt hoc ſequens problema, ad aliorum ingenia in hunc puluerem ſollicitanda, cui quidem à nemine (quod ſciam) hodie penitus ſatisfactum eſt, in eo, analyticen noſtram exercere volui. ſtudio itaque in te meo, & inuentis in tuum vſum faue ac fruere. Vale.

ILLVSTRISSIMO
AC REVERENDISSIMO
DOMINO SVO, DOMINO
PERRONIO, S. R. E. CARDINALI,
Archiepiſcopo Senonenſi, Galliarum & Germaniæ Primati, magno Franciæ Eleemoſinario, &c.

SPLENDIDOS *hoſce titulos & ſacrata nomina,* (CARDINALIS ILLVSTRISSIME) *non leuis aulæ fauor dedit, aut improuiſus caſus attulit, ſed dignitas tua ac virtus meruit. nam ſiue rei ſacræ ſiue ciuili vacas, in te omnium oculos ſimul ac mentes trahis: conſilio prudens, vitâ probus, doctrinâ præſtans. tum in Mathematicis quidem,* ϗ πάσῃ θεωρείᾳ ἐπιστημονικῇ *adeo excellis, vt vel tuum ſolum ſuper iſtis iudicium* ἀκριβεστάτης ἀποδείξεως *apud omnes locum, merito obtineat. & ſane in rerum ve-*

ritate perquirenda, quæ certis velut rationum gradibus & inter alis, inter ſe vel conueniunt vel diſſident, qui harum artium ſubtilitates non prægustarit, rite philoſophari nequit: hinc nobilis illa vox Platonis θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν. ſic te philophantium principem iure admiramur, qui ita res inter ſe componere & comparare nouiſti, vt ſubtiliſſimæ mentis tuæ aciei nihil inconſpectum præterfugiat. & vt Cynoſura regionum neſcios ducit, deuios dirigit, ita te in hac veritatis inquirendæ viâ, ignorantes ὁδηγὸν, aberrantes διορθωτὴν ſuſpicimus. quapropter μάθημα hoc πρόχειρον ad analyticen ſiue topicen mathematicam, expeditiſſimum viæ hactenus impeditæ & ſinuoſæ compendium, tibi lubens merito offero: vt & à nobiliſſimi nominis tui ſplendore, qui toti hactenus terrarum orbi illuxit, velut à ſole minora ſidera, lumen mutuetur, & ſupremæ quâ apud literatos vales auctoritatis tuæ patrocinio ac tutelâ muniatur. quod ſi pro votis (vt ſpero) accipis, animos mihi addet hæc profuſa tua benignitas, his maiora & te mage digna moliendi. Vale.

Lutetiæ Pariſiorum VIII. KALEND. MARTIAS.

Illuſtriſſ. nominis tui
cultor humillimus
ALEXANDER ANDERSONVS.

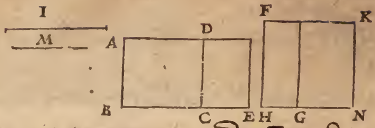
ALEXANDRI ANDERSONI ABERDONENSIS

SVPPLEMENTVM Apollonij Rediuiui.

LEMMA I.

Si fuerit rectangulum, ſiue plurium rectangulorum aggregatum, vel differentia, ſub lateribus, vno quidem ignoto, at reliquis cognitis, ad rectangulum ſub latere vtróque dato, vt data recta, ad idem latus ignotum: dabitur ignotum latus.

SIT primum rectangulum ſub lateribus, AB dato, at BC ignoto, ad rectangulum ſub lateribus FH, HG datis, vt recta data I, ad idem latus ignotum BC: dico dari BC.



cum si tres Lineae sint proportionales quadratum a media aequale ē rectangulo ab extremis

Ipſi enim AB, vel DC (completo nempe rectangulo ABCD.) datæ, applicetur rectangulum datum FG. ſitque latitudo ortiua CE. eritque BC, ad CE, vt recta data I, ad BC. & propterea BC quadratum, rectangulo ſub CE & I datis, æquale. datur itaque BC.

Sit deinde aggregatum rectangulorum AC, FG, ad rectangulum GK, ſub latere vtroque dato, vt recta data I, ad latus idem ignotum BC: dabitur iterum BC. applicentur enim ipſi AB, vel DC datæ, rectangula FG, (cuius latitudo fuit hactenus CF.) & GK, cuius latitudini æqualis ſit recta M. eritque BE ad M, vt recta data I, ad BC. & rectangulum BE in BC, æquale erit rectangulo M in I, dato. datur autem CE differentia extremarum, tum rectangulum ſub extremis, dabuntur igitur extremæ BE, BC. hoc quomodo fiat, vide ſequens lemma.

Sit tertio FN rectangulum, minus rectangulo AC, ad GK rectangulum, vt recta data I, ad latus ignotum BC. dico dari BC. applicetur vt prius ipſi AB datæ, rectangulum FN, & latitudo ortiua ſit BE, tum GK rectangulum, oriaturque latitudo M. & erit CE, ad M, vt I ad BC. & rectangulum ſub CE, BC, rectangulo ſub M & I, æquale. datur autem ſumma extremarum

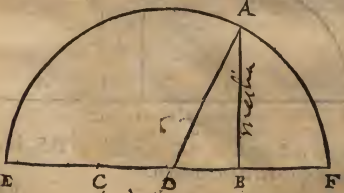
B E, & rectangulum ſub extremis M in I: dabuntur igitur extremæ BC, CE. ex altero lemmate ſequente.

Quarto ſit latus ignotum B E. & eſto rectangulum ſub AB, BE, minus F G rectangulo, ſub lateribus datis, ad G K rectangulum ſimiliter datum, vt recta I, ad B E. dabitur quoque BE. ipſi enim AB, vt ſupra, applicetur FG, ortaque latitudo ſit C E, tum G K, cuius latitudo ſit M. & erit BC ad M, vt I ad BE, & rectangulum B C in B E, rectangulo M in I æquale. datis itaque C E differentia extremarum, & M in I rectangulo ſub extremis, inueniantur extremæ BE, BC, vt iam docebitur. atque ita coefficienti lateris ignoti, reliquis applicatis, inuenietur quæſitum.

LEMMA II.

Data media trium proportionalium, & differentia extremarum, inuenire extremas.

Sit data AB media, differentia CB, quæ iungantur ad angulum rectum CBA. & diuidatur CB bifariam in D. tū centro D, interuallo DA, ducatur ſemi circulus EAF, eruntque extremæ quæſitæ EB, BF.



Quoniam enim æquales ſunt (ex conſtructione) E D, DF, itémque CD, DB, æquales quoque erunt BF, EC. & propterea BC differentia extremarum EB, BF, inter quas BA media eſt. quod erat faciendum.

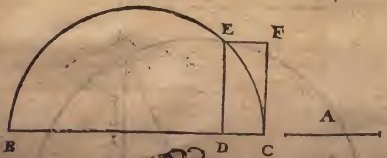
COROLLARIVM.

Hinc data differentia extremarum, & rectangulo ſub extremis, facile inuenientur extremæ, ſi dato rectangulo, fiat æquale quadratum, ex cuius latere, & differentia data, inueniantur extremæ, vt ſupra.

LEMMA III.

D*Ata ſumma extremarum, & rectangulo ſub extremis, inuenire extremas.*

Sit data ſumma extremarum B C, rectangulum ſub extremis æquale quadrato A. fiat ipſi B C perpendicularis CF, ipſi A æqualis, cui ad angulos rectos ſit FE, ſecans ſemiperipheriam ſuper diametrum BC decircinatam, in puncto E. & dimittatur perpendicularis E D.



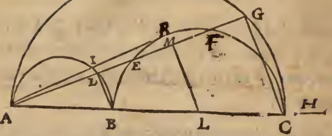
Eritque rectangulum B D C, quadrato D E, id eſt A, æquale. quod erat faciendum.

PRO-

Problema.

DAtis duobus ſemicirculis, in directum baſes habentibus, inter eorum circumferentias intercipere rectam datæ æqualem, quæ ad alterutrius ſemicirculi, angulum alterutrum pertineat.

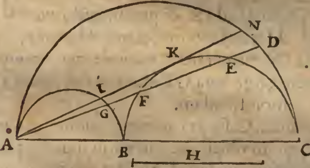
Dicitur linea ad angulum vel punctum pertinere, ſeu inclinari, quum continuata, per punctum illud tranſit. Hoc autem problema, vt varios caſus, ita & ſingulis caſibus proprias habet determinationes: diſtingui verò poteſt hæc caſuum multitudo, ſecundum diuerſas ſemicirculorum poſitiones. vel itaque dati ſemicirculi ſeſe contingunt, vel non contingunt. contingere vero ſe poſſunt dupliciter, primum exterius, neutro reliquum includente, atque hinc exiſtunt tres caſus: priores duo quum ſemicirculi dati in eandem partem baſeos vergunt, quorum primus, qùum iubetur datum ſegmentum intercipi inter vtriuſque peripheriæ connexum alter, quum inter vnius connexum & reliqui concauum. Sunt itaque ſemicirculi exterius ſeſe contingẽtes ADB, BEFC, rectáque data H. & ab angulo A, educenda ſit recta AE, intercepta ſegmento DE, ipſi H æquali, extra vtriuſque peripheriam. oportet autem rectam datã H, non maiorem eſſe ſegmento rectę ab angulo A eductæ, & ſemicirculum B E F C contingentis, intercepto inter punctum contingentiæ, & peripheriam connexam A D B. ſit igitur hoc factum. ducatúrque ſemicirculus A G C, ſuper rectam A C. & agantur rectæ D B, G C.



Iam erit vt AC ad AG, ita AB ad AD. & rectangulum AD in AC, æquale rectangulo AB in AG. & rectangulum CAB, rectangulo FAE quoque æquale eſt, atque etiam aggregatum AG in AB, FG vel DE (ſunt enim æquales, nam ducta recta ex centro L circuli BEFC, perpendiculari in EF, erunt DM, MG, æquales, ſicut & EM, MF, vnde & reliquæ DE, FG æquales quoque erunt.) in BC, æquale eſt aggregato FG in AC, AF in AB. (eſt enim AB in AG æquale aggregato AF in AB, & FG in AB.) & aggregatum quadrati FG, & rectanguli FAE, æquale eſt aggregato rectanguli AG in FG, & AD in AF. (eſt enim rectangulum AE in AF, æquale rectangulis AD in AF, & DE vel FG in AF.) ſed AF in AB, ad AF in AD eſt vt AB ad AD. & FG in AC, ad FG, in AG. eſt vt AC ad AG, i. AB ad AD. ergo & totum aggregatum FG in AC, AF in AB, id eſt AG in AB, FG, in BC, eſt ad totum aggregatum AG in FG, & AD in AF, id eſt FG quadrati, & rectanguli CAB, vt AB ad AD. hoc eſt aggregatum AD in AC, FG in BC, eſt ad aggregatum FG quadrati, & rectanguli CAB, vt recta AB, ad rectam AD. dabitur igitur ex primo lemmate recta AD, quare & tota AE.

Sin autem ducatur tangens A I K, eſſe ſegmentum I K maximum omnium quæ inter datos circulos interponi poſſunt, & ad angulum A pertinent, ſic demonſtratur, eſt enim A K maior quam A E, & A I minor quam A D, ergo relinquitur I K maior quam D E atqui eodem modo oſtendetur, quo angulus D A B minor fuerit, ſegmenta quoque intercepta minora eſſe.

In ſecundo caſu ex hac ſemicirculorum poſitione oportet datam rectam H ipſa quidem B C non maiorem, nec recta I K minorem eſſe, ſit itaque media, & GE illi æqualis, in ſequenti figura, cuius conſtructio ſimilis priori.



Eritque vt ſupra A C in A G, æquale A B in A D. & aggregatum A D in A B, GE in B C, æquale aggregato GE vel F D in A C, (ſunt enim GF, ED æquales, vt oſtenſum eſt, vnde addito communi FE, erunt quoque GE, FD æquales.) & A F in A B. & aggregatum rectanguli CAB, id eſt EAF, & quadrati FD vel GE, æquale eſt aggregato FD vel GE in D A, & AF in A G. (eſt enim EAF rectangulum æquale rectangulis A F in A G, & A F in GE vel FD. at FD quadratum cum rectangulo F D in A F, æqualia ſunt rectangulo F D in D A) ſed GE in AC, ad

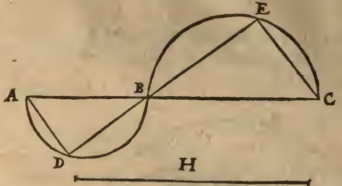
GE in DA, eſt vt AC ad DA. & AF in AB, ad AF in AG, eſt vt AB ad AG, id eſt AC ad AD. ergo & aggregatum GE in AC, & AF in AB, id eſt AD in AB vel AG in AC, & GE in BC, eſt ad aggregatum GE in DA, & AF in AG, id eſt CAB rectanguli, & quadrati GE, vel FD, vt AC ad AD, vel AB ad AG dabitur itaque AG, quare & AE.

Eſſe autem GE ipſa BC minorem, ſic demonſtratur. eſt AB ad AG, vt BC ad GD. atqui AB ipſa AG maior eſt, ergo & BC ipſa GD maior erit. multo itaque maiori ipſa GE. at eandem maiorem eſſe ipſa IK, ita probatur, protrahatur IK ad N punctum in circumferentia ADC, eritque DG maior ipſa IN, eſt enim vt AB ad BC, ita AG ad GD, & ita AI ad IN, & permutando, vt AG ad AI, ita GD ad IN. eſt autem AG ipſa AI maior, ergo & GD ipſa IN maior erit. & proinde eius dimidium ipſo IK maior, ergo tota GE multo maior quam IK, quod erat demonſtrandum.

Tertius autem Caſus ex hac ſemicirculorum contingentia eſt, quum oblati ſemicirculi in diuerſas partes communis baſeos diuergunt. oportet autem in huiuſmodi caſu, rectam datam compoſita ex baſibus non maiorem eſſe.

Sint itaque ſemicirculi dati ADB infra, at BEC ſupra communem baſin AC. ſitque recta data H. minor ipſa AC. diuidatur recta H, ſecundum rationem AB ad BC, ſitque ſegmento ipſi AB analogo æqualis recta DB, & reliquo ſegmento æqualis ſit BE.

Qvo-



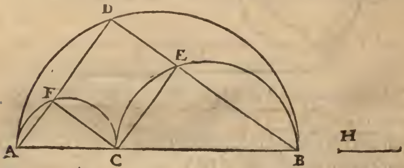
Quoniam igitur eſt vt AB ad BC, ita DB ad BE, erit & permutando AB ad DB, vt BC ad BE. ſunt autem anguli ad D & E ſimul recti (ductis nempe rectis DA, EC.) erunt igitur anguli EBC, DBA, æquales, & in directum erunt DB, BE. quare inter peripherias BEC, ADB, intercepta eſt recta DE, ad angulum B pertinens, ipſique H datæ æqualis, quod erat faciendum.

Eſſe autem DE minorem ipſa AC, manifeſtum eſt, quoniam AB maior eſt quam BD, & BC maior quam BE, ergò & tota AC maior erit tota DE.

Semicirculi dati ſecundo, ita ſeſe contingere poſſunt, vt alter reliquum includat, atque hinc triplex iterum caſus emergit, vel enim intercipienda recta, ad communem ſemicirculorum contactum pertinebit, vel ad reliquum angulum, idque vel maioris, vel minoris ſemicirculi. in primo oportet rectam datam, baſium differentia non maiorem eſſe.

Sint itaque dati ſemicirculi ADB maior & exterior, contingens minorem & interiorem CEB, in puncto B. ſitque baſium differentia AC, ſuper quam deſcribatur ſemicirculus AFC. & ſit recta data H, non maior ipſa AC.

aptetur itaque ipſi AFC peripheriæ, recta FC, ipſi H æqualis. ducaturque recta AFD, ſecans circumferentiam maiorem in D puncto. tum ab angulo B, educatur recta BED, intercepta ſegmento DE, quod dico rectæ F C, ſiue H datæ, æquale.



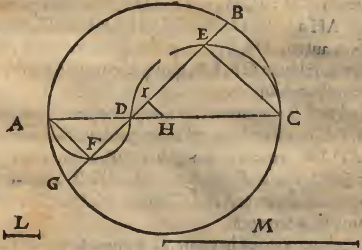
Quoniam enim in quadrilatero FDEC, (iunctis ſcilicet C, E punctis) anguli F, D, E, in ſemicirculis, recti ſunt, erit & F C E angulus (complementum nempe ad quatuor rectos.) rectus quoque atque adeo parallelogrammum erit rectangulum FDEC, & latera oppoſita FC, DE, æqualia, quod erat demonſtrandum.

Determinatio autem problematis manifeſta eſt: nam AC maxima eſt earum omnium, quæ ſemicirculo AFC adaptari poſſunt.

Si ad maioris ſemicirculi angulum reliquum pertinere debet data recta, duplex exiſtit caſus, vel enim caua maioris & conuexa minoris peripheria terminanda eſt: & tum eadem erit pragmatia quæ primi caſus, vt inde patet, ſunt enim DE, FG in primi caſus figura æquales: vel vtriuſque ſermicirculi peripheria caua eadem finienda erit, quod eodem modo perficietur quo caſus ſecũdus, ſunt enim illic GE, FD æquales, quare eo recurratur.

Sed iam ad minoris ſemicirculi angulũ reliquum pertineat data recta, atque hinc duo caſus exoriẽtur, nam vt ſupra, vel caua maioris & conuexa minoris, vel vtriuſque caua peripheria, terminanda eſt. in priori caſu, oportet rectam datam media proportionali inter minoris baſin, & baſium differentiam, non maiorem eſſe.

Sint igitur ſemicirculi ABC, maior, DEC minor, ſeſe contingentes in C puncto. ſitque data recta L, non maior quam eſt media proportionalis inter AD, DC. & ſit factum, ducta nempe recta DB, intercepta ſegmento EB, ipſi L æquali: producaturque DB, in circumferentiam maioris ſemicirculi in G. & ſit ductus ſemicirculus AFD. eritque aggregatum AD in DE, EB in AC, ad differentiam AD in DC & EB quadrati, vt DC ad DE.



Eſt enim AD ad FD, vt DC ad DE. & rectangulum AD

in DE, æquale rectangulo FD in DC. eſt autem aggregatum FD in DC, EB vel GF in AC, (ſunt enim EB, GF æquales, vt poſt demonſtrabitur) æquale aggregato GD in DC & GF in AD. & AD in DC, æquale eſt GD in DB. eſt autem GD in DB, minus EB vel GF quadrato, æquale aggregato GD in DE & FD in EB vel GF. atqui GD in DC ad GD in DB eſt, vt DC ad DF, & GF in AD ad GF in FD, eſt vt AD ad FD, vel DC ad DE. ergo & aggregatum GD in DC, GF in AD, id eſt ex demonſtratis AD in DE, EB in AC, eſt ad aggregatum GD in DE, GF vel EB in FD, id eſt vt oſtēſum eſt, ad differentiam AD in DC, & EB quadrati, vt DC data, ad DE quæſitam dabitur igitur DE, ex præmiſſo lemmate.

Eſſe autem GF, EB æquales, ſic demonſtratur ducatur a centro H circuli ABC, ad GB: perpendicularis HI eruntque GI, IB æquales, eſt autem AD ad DF, vt DH ad DI, & permutādo AD ad DH, vt FD ad DI, & componendo AH ad DH, vt FI ad DI, & iterum permutando AH ad FI, vt DH ad DI, id eſt HC ad IE, æquales ſunt autem AH, HC, æquales igitur erunt FI, IE, quare & reliquæ GF, EB, quoque æquales: quod erat demonſtrandum.

Sed & EB minorem eſſe media proportionali inter AD, DC, ſic oſtenditur. eſt enim quadratum mediæ inter AD, DC, æquale rectangulo GDB: atqui rectangulum GDB, maius eſt quadrato GF, vel EB: ergo media proportionalis inter AD, DC, maior erit ipſa EB, vel alia quauis ſit intercepta.

In reliquo caſu ex hac datę, ad minoris ſemicirculi angulum reliquum προσνεύσαι oportet rectam datam, ma-

ioris ſemicirculi baſi non maiorem eſſe, nec media proportionali inter minoris baſin, & baſium differentiam, minorem eſſe.

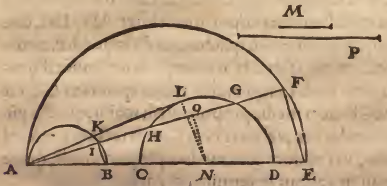
Sit itaque factum: & repetatur figura proxima, ſitque GE æqualis datæ M. & erit differentia DC in GE, & ſpatij quo differunt AD in GE, & AD in GD, id eſt AD in DE, ad DC quadratum, vt AD ad GD. eſt enim AD ad FD, vt DC ad DE, & rectangulum AD in DE, æquale rectangulo FD in DC. eſt autem DC in GE, minus DC in FD, æquale DC in DB: (ſunt enim GE, FB, æquales propter GF, EB, æquales, vt ſupra oſtenſum eſt.) atqui DC in DB, ad DC quadratum, eſt vt BD ad DC, id eſt AD ad GD. erit igitur differentia DC in GE, & ſpatij quo differunt AD in GE, AD in GD, ad DC quadratum, vt AD ad GD. dabitur igitur GD.

Determinatio autem manifeſta eſt, nam GE, minor eſt ipſa AC, ſiquidem & tota GB eadem minor eſt, at maior eſt GE media proportionali inter AD, DC, ſiue GD, DB. quoniam enim quadratum dictæ mediæ, æquale eſt rectangulo ſub GD, DB. atqui hoc minus eſt quadrato dimidiæ GI, ergo multo minus quadrato GE, eſt itaque GE dicta media proportionali maior, quod ſi pũctam D cadat in H, vel inter H & C: tum recta GD erit vel æqualis, vel maior dicta medica proportionali, quare etiam in ijs caſibus determinatio patet.

Si oblati ſemicirculi ſeſe, non tãgunt, vel igitur ſe ſecãt, vel non ſecãt hocque bifariam: vel enim alter reliquũ includit, vel neuter, quod ſi neuter reliquũ includit, vel ad eaſdem ſunt partes baſeos, vel ad diuerſas. Si ad eaſdem pertinent, duplex orietur caſus: aut enim ſegmentum

datum intercipiendum, erit totum extra vtrumque, vel alterum tantum, in priore caſu, oportet rectam datam non minorem eſſe parte baſeos, inter datos circulos interiecta, nec maiorem ſegmento rectæ eductę ab angulo ad quem pertinere debet, & reliquum tangentis, intercepto inter punctum contactus vnius, & conuexam reliqui peripheriam.

Sint itaque quales expetuntur circuli, AIB, CHGD, quorum neuter, reliquum nec tangat, nec ſecet, nec includat. Sitque data intercipienda M. ſit hoc factum: & IH ad angulum A pertinens, ipſi M æqualis. fiatque DE æqualis ipſi BC, & ducatur ſemicirculus AFE. dico aggregatum rectangulorum AI in AE, IH in BE, ad aggregatum quadrati IH, & rectanguli DAC, eſſe vt AB ad AI.



Eſt enim AE ad AF, vt AB ad AI. & rectangulum AF in AB. æquale rectangulo AE in AI. & AD in AC æquale rectangulo AG in AH. ſed aggregatum AF in AB, IH in BE, æquale eſt aggregato IH in AE, & AG in AB (eſt enim AF in AB æquale AG in AB, & HI vel GF in AB,

(ſunt enim IH GF æquales, quod eodem modo demō-ſtrari poteſt, quo ad primam figuram huius problematis DE, FG oſtenſæ ſunt æquales.) & aggregatum quadrati HI, vel GF, & rectanguli GAH, æquale eſt aggregato AF in IH, vel GF, & AI in AG, (eſt enim AG in AH, æquale IH vel FG, in AG, & AI in AG.) ſed eſt AE in IH, ad AF in IH, vt AE ad AF, id eſt AB ad AI, & AG in AB ad AG in AI, vt AB ad AI. Ergo aggregatum AE in IH, AG in AB, (id eſt AI in AE, & IH in BE.) ad aggregatum AF in IH, AG in AI, (id eſt quadrati IH, & rectanguli DAC.) eſt vt AB ad AI. data itaque recta intercipienda M, dabitur & AI, ex primo lemmate. quod erat quæſitum.

Quod ſi ducatur recta AKL, tangens circulum CGD in L & ſecans circulum AIB in K, eſſe IH, ipſa KL minorem, manifeſtum eſt. nam tota AH, tota AL minor eſt, at AI pars, maior quam AK, ergo reliqua IH reliqua KL minor eſt. eodémque modo, eſt AH maior ipſa AC at AI minor quam AB, ergo reliqua IH, reliqua BC maior eſt.

Sin in hac ſemicirculorum θέσει, recta intercipienda, ſemicirculi ad cuius angulum pertinere debet conuexa, reliqui vero caua peripheria, terminēda ſit, oportet rectam datam non maiorem eſſe, poſterioris baſe cō-tinuata baſium interſegmento, nec minorem ſegmento tangentis eundem poſteriorem, ab alterius angulo, inter punctum contingentiæ, & conuexam prioris peripheriam intercepto.

Sint vt prius circuli dati AIB, CHGD, rectaque data P. & ſit factum quod iubetur, ducta nimirum AG, ha-

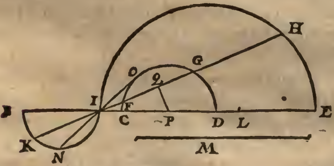
bens ſegmentum IG, rectæ, P, æquale. fiatque DE, æqualis ipſi BC vt prius, & ſit ductus ſemicirculus AFE, reliquaque perficiantur vt in priori ſchemate. erit aggregatum rectangulorum AE in AI, BE in IG vel HF, (ſunt enim æquales, quia IH, GF æquales ſunt) ad aggregatū rectanguli DAC, & quadrati IG, vel HF, vt AB ad AI.

Eſt enim vt ſupra, AE in AI, æquale rectangulo AB in AF & aggregatum AB in AF, & IG vel HF in BE, æquale aggregato HF in AE & AH in AB. aggregatum autem rectanguli DAC, id eſt GAH, & quadrati IG vel HF, æquale eſt aggregato AH in AI, AH in IG vel HF, & quadrati ipſius IG, vel HF. ſed quadratum HF vel IG, cnm rectangulo AH in HF æquale eſt rectangulo HF in FA. ergo aggregatum GAH, vel DAC, & quadrati IG, æquale eſt aggregato HF in FA, & AH in AI. eſt autem vt ſupra HF in AE, ad HF in FA, vt AE ad FA, vel AB ad AI. & AH in AB, ad AH in AB, ad AH in AI, vt AB ad AI. ergo & aggregatum HF in AE & AH in AB, (id eſt AE in AI, & BE in IG vel HF.) eſt ad aggregatum HF in FA, & AH in AI, (id eſt ad rectangulum DAC, & quadratum IG vel HF.) vt AB ad AI. data igitur IG, vel P recta, dabitur & AI quæſita. Eſſe autem BD maiorem ipſa IG, ſic oſtenditur. ducantur NO, NL perpendiculares ipſis AG, AL ex centro N, circuli CHGD. & erit BN maior quā IO, & ND quam OG: ergo tota BD, tota IG maior eſt. & IO maior quā KL, eſt enim AK ad KL, vt AB ad BN, id eſt, AI ad IO, & permutando AI ad AK, vt IO ad KL. eſt autem AI ipſa AK maior, ergo & IO, ipſa KL maior erit: & propterea IG ipſa KL multo maior· quod erat demonſtrandum.

Quod

Quod ſi in diuerſas baſeos partes diuergant dati ſemicirculi ſeſe nec tangentes, nec ſecantes, quorúmque neuter reliquum includit, duplex quoque naſcetur caſus: aut enim vtriúſque caua, aut vnius caua, reliqui vero cõuexa peripheria, intercipiẽda eſt, & data recta. in priori, oportet rectam datam aggregato baſium, & inter ſegmenti, non maiorem eſſe, nec minorem recta, ab vnius angulo reliquum tangente, intercepta inter punctum contactus, & canam reliqui peripheriam.

Sint igitur dati ſemicirculi BKI, CFGD, datáque recta M. & ſit factum. ducta nempe recta KIG, ad angulum I pertinens, æqualis datæ. Fiat ipſi BC æqualis DE, Itemque BI, LE, & IC, DL æquales, ducatúrque ſemicirculus IHE. & erit differentia rectangulorum IL in KG, & IE in IG, ad rectangulum BI in IC, vt ID ad IG.



Eſt enim KG in IL, æquale KG in IE, minus KG in LE, vel BI. ſed IE in KG, minus IE in IG, eſt IE in KI. hoc autem æquale eſt ipſi BI in IH. (eſt enim BI ad IK, vt IE ad IH.) & BI in IH, minus BI in KG, eſt BI in IF. (ſunt enim KF, GH æquales, vt poſt oſtendetur, & propterea KG, FH.

ergo IH æqualis erit compoſitæ ex KG & IF.) atqui BI in IF, ad BI in IC, eſt vt IF ad IC, id eſt ID ad IG. ergo IL in KG, minus IE in IG, eſt ad BI in IC, vt ID ad IG, quod erat demonſtrandum. hinc ex lemmate præmiſſo, dabitur ſegmentum IG.

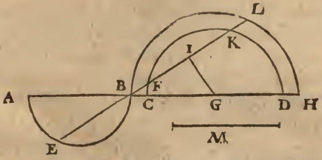
Eſſe autem æquales KF, GH, ſic demonſtratur. à centro P ſemicirculi CGD, ducatur perpendicularis PQ, eritque IP ad IQ, vt PE ad QH, vel BI ad IK. & cōponēdo BP ad KQ, vt PE ad QH. & permutando, BP ad PE, vt KQ ad QH. ſunt autem ex conſtructione æquales BP, PE, ergo & KQ, QH æquales quoque erunt. ſunt autem & FQ, QG æquales, ergo & reliquæ KF, GH, æquales quoque erunt, quod erat demonſtrandum.

Sed & KG minorem eſſe ipſa BD, manifeſtum eſt. nam KI minor eſt quam BI, & IG quam ID, ergo & tota KG, tota BD minor erit. ſimiliter, & eadem KG maior eſt quam NO. (ducta nempe recta NIO, tangente circulum COGD, in O puncto.) eſt enim KI maior quam NI, & IG quam IO. Ergo & tota KG maior erit quam tota NO.

In reliquo caſu ex hac ſemicirculorum poſitione, quum nimirum recta data, caua, ſemicirculi ad cuius angulum pertinere debet, peripheria, & reliqui conuexa terminanda eſt, determinatio maximi & minimi non eſt tam obuia, quam in ſuperioribus experti ſumus, qualem vero præſens demonſtratio ſuggerit, poſt analyſin vide.

Sint dati ſemicirculi AEB, CKD, dataque recta M. & ſit factum. ducta ſcilicet recta EBF æqualis datæ, & fiat ſegmento BC æqualis DH recta. ducaturque ſemi-

circulus BLH. tum recta perpendicularis ex ceutro G, circuli CFKD, in rectam EBF protenſam in L punctum, in peripheria BLH, quæ ſit GI. eritque differentia BH in EF, & AH in BF, ad AB in BD, vt BC ad BF.



Eſt enim AH in BF æquale ipſis AB in BF, & BH in BF, at BH in EF, minus BH in BF, eſt BH in BE, id eſt AB, in BL, (eſt enim AB ad BE, vt BH ad BL.) ſed AB in BL minus AB in BF, eſt AB in FL, vel BK. (ſunt enim BF, KL æquales, quoniam BI, IL, itémque FI, IK, æquales quoque ſunt.) at AB in BK, ad AB in BD, eſt vt BK ad BD, vel BC ad BF. Ergo differentia rectangulorum BH in EF, & & AH in BF, eſt ad AB in BD, vt BC ad BF, quod erat demonſtrandum, ex demonſtratis igitur dabitur BF.

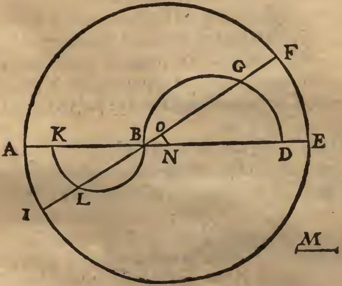
Hinc omnibus ipſi AH applicatis, oportet latitudinem ortam ex applicatione BH in EF, non minorem eſſe dupla eius, quæ poteſt rectangulum ex latitudine orta ex applicatione AB in BD, in rectam BC. tum altera extremarum (diuiſa nempe priori latitudine ita, vt dicta recta inter eius partes media ſit proportionalis.) maiore quidem quam BC, at minore quam eſt tangens a puncto B, inter B, & punctum contingentiæ in circumfe-

rentia CKD, ſublata ex recta data M, reliquum ſegmentum, minus eſſe debet recta AB, at maius ſegmento dictæ tangentis inter B punctum, & cauam ſemicirculi AEB peripheriam, alioqui dicta recta, intercipi non poteſt. vt ex demonſtratis patet.

Quum circulorum ſeſe nec tangentium, nec ſecantiũ, alter reliquum includit, aut recta data intercipienda, ad maioris ſemicirculi angulum pertinebit, aut ad minoris, & ex vtroque bini caſus deriuantur, ex priori quidem, vel recta data caua maioris & conuexa minoris circumferentia terminãda eſt: vt in ſuperiori penultima figura, recta G H. vel vtriúſque caua peripheria contineri debet: qualis in eadem eſt recta F H. in huiuſmodi ſemicirculorum poſitione, aut (repetita figura iam dicta) DE, ipſa CI minor, aut maior, aut eidẽ æqualis eſt. ſi minor, petatur prioris caſus pragmatia ex nono caſu, ſũt enim illic IH, GF ęquales. ſi maior, operaberis vt in eadem ſuperiori penultima figura, facta nimirum B C, ipſi DE æquali, ſunt enim illic KF, GH æquales, vt oſtẽſum eſt. quod ſi æquales fuerint IC, DE, æquales quoque erunt IF, GH, quod in proxima præcedente figura probatum eſt, indidemque & reliquo quoque caſui ſatisfiet.

Iam ad minoris ſemicirculi angulum pertineat data recta, ſintque dati ſemicirculi AFE, BGD. vnde duo iterum oriuntur caſus, aut enim maioris caua, minoriſque conuexa, aut vtriuſque caua peripheria finienda eſt data recta. ſit itaque pro priori, data recta M. ac primũ, ſit DE minor quam AB, & tum oportebit datam rectam, media proportionali inter AB, BE non maiorem eſſe, nec recta DE minorem.

Sit igitur factum, ducta nimirum recta BGF, habens ſegmentum GF, ipſi M æquale. ſitque maioris ſemicirculi ceutrum N. & ipſi ND fiat æqualis NK, ducaturque ſemicirculus KLB, interſectus a recta FGB, (protenſa in circumferentiam maiorem, in I punctum) in puncto L. eritque differentia aggregati BD in BI, KB in GF, & rectãguli GF in BD, ad rectangulum AB in BE, vt recta KB ad BI.



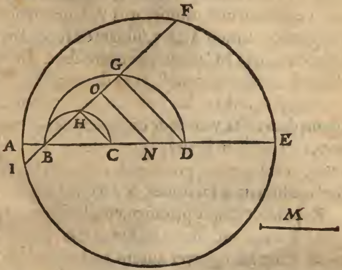
Sunt enim primum GF, IL æquales, ducta enim a centro N, ad rectam IF perpendiculari NO, eſt kB ad BN, vt LB ad BO. & componendo, KN ad LO, vt BN ad BO, id eſt ND ad OG, & permutando KN ad ND, vt LO ad OG. ſunt autem ex conſtructione KN, ND æquales, ergo & LO, OG æquales quoque erunt, igitur & reliquæ IL, GF. Iam BD in BI, minus BD in GF, vel IL, eſt BD in LB. hoc autem æquale KB in BG. (eſt enim BD ad BG,

vt KB ad LB.) ſed aggregatum KB in GF, KB in BG, id eſt KB in BF, eſt ad AB in BE, id eſt IB in BF, vt KB ad IB. ergo differentia aggregati BD in BI, KB in GF, & rectanguli GF in BD, eſt ad rectangulum AB in BE, vt recta KB ad rectam IB, quod erat demonſtrãdum. datis igitur ſemicirculis poſitione vt ſupra, rectâque M, dabitur IB, ex demonſtratis.

Eſſe autem rectã GF minorem media proportionali inter AB, BE, ſic oſtenditur quadratum mediæ inter AB, BF, æquale eſt rectangulo I B F, hoc autem maius quadrato I L, vel G F, ergo & media proportionalis inter AB, B E maior quoque eſt quam GF at eadẽ GF vel IL, minor eſt quam DE vel AK quoniam tota BI, maior eſt tota BA, & BL pars, minor parte BK: ergo reliqua LI, reliqua AK maior erit.

Quod ſi AB, DE fuerint æquales, æquales quoque erunt IB, GF, dataque interponenda, media proportionali inter AB, BE maior eſſe nõ debet, nec recta AB vel DE, minor. quod vlteriore declaratione non indiget.

Sit iam DE maior quam AB, & ſit data recta M. determinationem vide infra analyſin. ſitque factũ, ducta ſcilicet recta BGF, habens ſegmentum GF, æquale datæ M. fiatque AC æqualis ipſi D E. & ducatur ſemicirculus BHC, ſecans rectam BGF, in H puncto, protendatur autem BH GF recta, in I punctum in circumferentia maiore AFE, eritque differentia rectangulorum GF in compoſitam ex BD, BC, & BD in IB, ad rectangulum AB in BE, vt recta BC ad IB rectam.



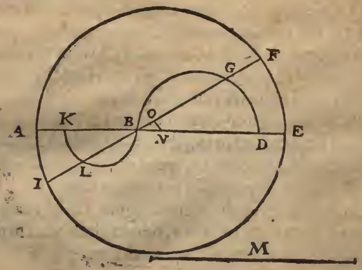
Sunt primum IH, GF æquales, quoniam ex conſtructione ſunt AC, DE æquales, & reliquæ CN, ND, ex æqualibus AN, NE æquales quoque erunt, & propterea HO, OG æquales, (ductis perpendicularibus CH, NO, DG.) vnde & reliquæ IH, GF æquales: eſt autem IH vel GF in BD, minus IB in BD, æquale BH in BD, hoc autem æquale eſt BG in BC. (eſt enim BD ad BG, vt BC ad BH.) at aggregatum BG in BC, & IH vel GF in BC, id eſt BF in BC, eſt ad AB in BE, id eſt IB in BF, vt BC ad IB: ergo differentia IH, vel GF, in compoſitam ex BD, BC, & BD in IB, eſt ad rectangulum AB in BE, vt recta BC, ad rectam IB, quod erat demonſtrandum. dabitur igitur ex præmiſſis ſegmentum IB.

Hinc ipſi BD applicatis rectangulis, GF in compoſitam ex BD, BC, & AB in BE, oportet latitudinem priorem, non minorem eſſe dupla rectæ quæ poteſt rectan-

gulum ex latitudine poſteriore, in rectam BC. tum altera extremarum non minore ipſa AB, nec maiore media proportionali inter AB, BE, ſublata ex recta data, reliquũ ſegmentũ, ipſa BC maius eſſe non debet. Alioqui recta data interponi non poteſt, vt ex demonſtratis liquet.

Reliquus caſus ex hac ſemicirculorum poſitione eſt, quum data recta, vtriuſque caua peripheria intercipienda venit: qualis in figura præcedenti recta IG. hic autem caſus, vt & ſuperior, pro diuerſa ratione DE, ad BA, diuerſas admittit & factiones, & determinationes.

Repetatur itaque primũ præmiſſa figura, in qua DE, ipſa AB minor eſt. ſitque factum, recta nempe IG ſit æqualis datæ M. oportet autem rectam datam ipſa AD non maiorem, nec media proportionali inter AB, BE minorem eſſe. erit itaque tum, differentia rectanguli BD in IG, & ſpatij quo differunt KB in IG, & KB in IB, id eſt KB in BG, ad rectangulum AB in BE, vt BD data, ad IB quæſitam.



Eſt

Eſt enim KB in BG, æquale BD in LB. (nam eſt BD ad BG, vt KB ad LB.) & BD in IG, minus BD in LB, eſt BD in BF (oſtenſæ ſunt enim IL, GF æquales.) eſt autem BD in BF, ad IB in BF, id eſt AB in BE, vt BD ad IB. ergo differentia rectanguli BD in I G, & Spatij quod differunt KB in IG, & KB in IB, eſt ad rectangulum AB in B E, vt BD data, ab IB quæſitam. dabitur igitur IB.

Eſſe autem I G minorem ipſa AD, manifeſtum eſt. nam tota AE, maior eſt tota IF, & GF maior quam DE, vt oſtenſum eſt. Ergo reliqua IG, reliqua AD minor eſt. Eſt autem eadem maior media proportionali inter AB, BE, eſt enim huius quadratum, ęquale rectangulo IBF, atqui quadratum IG, maius eſt rectãgulo IBF, eſt enim maius quadrato dimidiæ IO, ergo & recta IG, ſiue quęcunque alia ſit intercepta, media inter AB, B E maior erit.

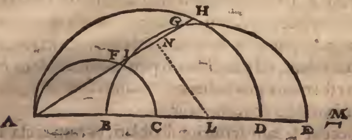
Quod ſi AB, DE fuerint æquales, pragmatia & determinatio obuiæ ſunt & faciles, erunt enim IG, BF æquales, quare iure omittitur hic caſus.

Reſtat caſus in quo DE maior eſt quam AB. repetatur itaque ea figura, ſintque oblati quales iſthic ſemicirculi AF E, BGD. & quoniam illic oſtenſæ ſunt IH, GF æquales, facta AC ipſi DE æquali, erunt quoque HF, IG æquales, quomodo autem intercipienda ſit recta HF, æqualis datæ, ad punctum B pertinens, ibidem oſtenſum eſt: quare pro huius caſus quum factione, tum determinatione eo recurratur.

Secent ſe iam ſemicirculi oblati, & tum recta intercipienda, vel ad angulum ſegmenti communis vtrique ſemicirculo, pertinere poteſt, vel ad reliquum: ſi hoc,

vel recta data terminanda eſt extra vtrumque, vel alterum tantum, vel intra ſegmentum vtrique commune tota continetur.

Sint igitur primum circuli ſeſe ſecantes AF C, BIGE. ſitque recta data M, intercipienda extra vtriuſque peripheriam cauá, vel inter vtriúſque peripheriam conuexam, pertineátque ad angulum A. oportet autem datam rectam non maiorem eſſe tangentis ſegmento ab angulo A, intercepto inter punctum contingentiæ in peripheria BI GE, & conuexum AF C peripheriam. ſit factum, intercepta nempe recta FI æqualis datæ M, & ad angulum A pertinens. ſintque æquales BC, DE, & ducatur ſemicirculus AHD, & ſecet recta A F I circumferentias BGF, AHD, in punctis I, G, H. eruntque primum rectæ FI, GH æquales. nam ſi a centro L, circuli, BIGE, ducatur perpendicularis LN, in rectam IG, erit vt CL ad LD, ita F N ad N H. & propterea FN, NH æquales. atqui, NI, NG quoque æquales ſunt. ergo & reliquæ FI, GH. dico iam eſſe aggregatum AF in A D, F I vel, HG in CD. ad aggregatum FI vel GH quadrati, & rectanguli AB in AE, vt AC ad AF.



Eſt enim A D ad AH, vt AC ad AF. & rectangulum AC in AH, æquale rectangulo AF in AD. & rectangulum

AB in AE, æquale rectangulo AG in AI. ſed aggregatum rectangulorum AC in AH, & HG vel FI in CD, eſt æquale aggregato GH vel FI in AD & AG in AC. (eſt enim AH in AC, æquale rectangulis AG in AC, & GH in AC.) & aggregatum rectanguli GAI, & quadrati GH, vel FI, eſt æquale aggregato AH in GH vel FI, & AF in AG. (eſt enim AI in AG, æquale rectangulis AF in AG, & FI in AG.) ſed GH vel FI in AD, ad GH in AH, eſt vt AD ad AH (id eſt AC ad AF. & AG in AC, ad AG in AF, eſt vt AC ad AF. ergo aggregatum GH in AD. & AC in AG, id eſt AC in AH, vel AF in AD & HG in CD,) ad aggregatum quadrati GH, vel FI, & rectanguli GAI, id eſt EAB, eſt vt AC ad AF, quod erat demonſtrandum. dabitur igitur AF.

Eſſe autem FI minorem ſegmento tangentis dicto, ſic docetur: eſt enim tota tangens, maior tota AI, & ſegmentum tangentis intra circulum AFC, minus ſegmento AF. ergo reliquum tangentis, reliquo ſegmento FI, maius erit.

Si extra alterum tantum datorum ſemicirculorum, terminanda eſt data recta, erit illud, vel extra circulum ad cuius angulum pertinere debet, vel extra reliquum, ſi prius, vel tota continebitur intra reliquum circulum, vel pars tantum. hoc autem vt in proxima præcedente figura, recta FG, ad angulum A pertinens.

Repetatur itaque eius conſtructio. ſitque interpoſita recta FG, æqualis datæ, ad angulum A pertinens. eſt autem hæc non minor ſegmento tangentis circulum BGE, ab angulo A eductæ, inter punctũ cõtactus, & conuexam circuli AFC peripheriam comprehenſo: nam du-

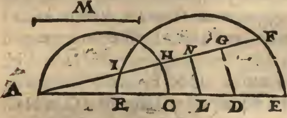
plum illius ſegmẽti minus eſt ipſa, FH, ergo eius dimidium minus ipſa, FN, & proinde multo minus ipſa FG, nec maior, ſegmento rectæ ab angulo A eductæ per cõmunes circulorum ſectiones, (ſunt enim illæ in eadem recta linea cum A puncto, ſi quidem FI, GH, ſemper ſunt æquales, vt oſtenſum eſt.) inter conuexam circuli ad cuius angulum pertinere debet, & reliqui cauam peripheriam intercepto. erit iam aggregatum AD in AF, CD in FG vel IH, (ex præmiſſis enim ſunt FG, IH æquales) ad aggregatum rectanguli EAB, & quadrati FG, vt AC ad AF.

Eſt enim AD ad AH, vt AC ad AF. & rectangulum AD in AF, ęquale rectangulo AH in AC, & aggregatum AC in AH, & CD in FG, æquale eſt aggregato FG, vel IH in AD, & AI in AC: aggregatum autem rectanguli EAB, id eſt GAI, & quadrati FG vel IH, æquale eſt aggregato AI in AF, AI in FG, & quadrati ipſius FG, vel IH, ſed quadratum IH vel FG, cum rectangulo AI in IH, æquale eſt rectangulo IH in HA. ergo aggregatum GAI, vel EAB & quadrati FG. æquale eſt aggregato IH in HA, & AI in AF. eſt autem IH in AD, ad IH in HA, vt AD ad HA, vel AC ad AF. & AI in AC ad AI in AF, vt AC ad AF. ergo aggregatum IH in AD, AI in AC, ad aggregatum IH in HA, & AI in AF, eſt vt AC ad AF, id eſt vt oſtenſum eſt, aggregatum AD in AF, & CD in FG, ad aggregatum rectanguli EAB, & quadrati FG, eſt vt AC ad AF. quod erat demonſtrãdum: data igitur FG, dabitur & AF.

Terminenda ſit iam data recta vtroque circulo, ita vt tota ſit extra eum, ad cuius angulum pertinere debet, ſed reliquo tota includatur.

Sint igitur circuli ſeſe ſecantes, AHC, BIFE. rectaque

data M, quæ ſegmẽto baſeos alterius, (ad cuius nimirum angulũ non pertinet) reliquo a ſegmẽto communi, non maior eſſe debet. ſit ducta recta AF, ſecans circumferentias datas, in punctis I, H, F. ſitque HF rectæ datæ M, æqualis, & fiat ipſi BC æqualis DE, ducaturque perpendicularis DG, in rectam AF. eruntque primum rectæ IH, GF, æquales. nam a centro L, circuli BIF E, ducatur alia, in eandem perpendicularis quæ ſit LN. erunt NH, NG, itemque NI, NF, æquales, quare & reliquæ GF, IH. dico iam aggregatum AC in HF, AC in AI, AD in HF, eſſe ad BA in AE, vt recta AD, ad AI rectam.



Eſt enim aggregatum AC in AI, AC in HF, vel IG, (ſunt enim ęquales, quia IH, GF, æquales ſũt, vt oſtenſum eſt.) æquale AC in AG, & AC in AG, æquale AH in AD (eſt enim vt AD ad AG, ita AC ad AH.) ſed aggregatum AD in AH, AD in HF, eſt AD in AF. eſt autem AD in AF ad AF in AI, (id eſt EAB) vt AD ad AI. ergo aggregatum cõpoſitæ ex AC & AD in HF, & AC in AI, eſt ad EAB, vt AD ad AI. dabitur igitur AI.

Eſt autem HF minor quam CE, quoniam CD maior eſt quam HG, & BC quam IH. (nam tota AC, maior eſt tota AH, & AB pars, minor parte AI, ergo reliqua BC, reliqua IH maior erit.) & propterea BD, maior quam IG, id eſt ex conſtructione CE maior quam HF.

Quod ſi data recta, tota intra circulum ad cuius an-

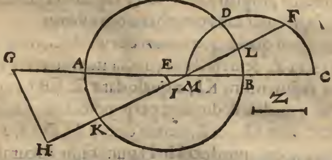
gulum pertinere debet, terminatur, erit vel tota extra reliquum, vel pars tantum. atque horum duorum caſuum, eadem eſt operatio, & determinatio, quæ in antepenultimo, & penultimo proxime præcedentibus. ſunt enim illic, in circulis AHD, BIGE, (quales hi caſus requirunt) rectæ GH, IH, rectis FI, FG, æquales. quare eo recurratur.

Si recta data ſpatio vtrique ſemicirculo communi, includenda eſt, vt in ſuperiori figura recta IH, ad angulũ A pertinens, oportebit rectam datam M, communi baſium interſegmento, non maiorem eſſe.

Repetatur itaque figura proxime præcedens, & ſit factum. eritque aggregatum AD in AH, & IH in AC, ad rectangulũ AB in AC, vt AE ad AI. eſt enim aggregatũ AD in AH, IH in AC, æquale aggregato CD in AH, & AC in compoſitam ex AH & IH vel GF. ſed rectangulum CD in AH, æquale eſt rectangulo AC in HG. (ſunt enim proportionales CD, HG, & AC, AH.) ergo aggregatum AD in AH, & IH in AC, æquale eſt aggregato AC in HG, & AC in compoſitam ex AH, GF, id eſt rectangulo ex AC in AF. ſed rectangulum AC in AF, ad rectangulum AC in AB, eſt vt AF ad AB, id eſt AE ad AI. ergo aggregatum rectãgulorũ AD in AH, IH in AC, id eſt AD in AI, AD in IH, IH in AC, eſt ad rectãgulum AB in AC, vt AE ad AI. quod erat demonſtrandum. data itaque IH, dabitur & AI. determinatio oſtenſa eſt, in caſu proxime ſuperiori.

Si ad angulum ſegmenti communis vtrique ſemicirculo, pertinet data recta: poterit tota terminari intra, extraue circulum ad cuius angulum pertinere debet, vel

partim extra, partim intra eundem. ſi primum, debet data recta non maior eſſe, ſegmento baſeos ſemicirculi intra quem continetur, reliquo a communi interſegmento. ſint itaque dati ſemicirculi ſeſe interſecantes, ADLB, MDFC, dataque recta Z. & ſit ducta recta MLF habens ſegmentum LF, æquale datæ Z. fiat ipſi BC æqualis GA, & producatur FLM quantumlibet in H, eique perpendicularis ſit GH. & ex centro E circuli ADB, eidem quoque perpendicularis ſit EI. erunt primum HK, LF æquales, ſunt enim GE, EC. æquales ex conſtructione. & EM ad MI, vt MC ad MF, & componendo EC ad IF, vt ME ad MI, id eſt EG ad IH. & permutando EG ad EC, vt IH ad IF. ſunt autem EG, EC æquales, ergo & IH, IF. at IK, IL æquales quoque ſunt, ergo & reliquæ HK, LF. dico iam differentiam aggregati rectangulorum GM in ML, GM in LF, & rectanguli MC in LF, eſſe ad rectangulum AM in MC, vt MB ad ML.



Eſt enim GM in MF (id eſt GM in ML, & GM in LF.) æquale rectangulo HM in MC. (eſt enim vt MC ad MF, ita MG ad MH.) ſed HM in MC, minus LF in MC, eſt KM in MC. atqui KM in MC, eſt ad AM in MC, vt KM ad AM, id eſt MB ad ML. ergo differentia aggregati re-

ctangulorum GM in ML, GM in LF, & rectanguli MC in LF, eſt ad rectangulū AM in MC, vt MB ad ML, quod erat demonſtrandum. data itaque LF, dabitur & ML.

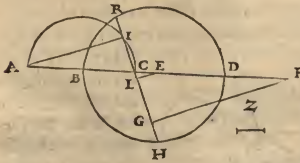
Eſt autem LF minor quam BC. quoniam tota MF, tota MC minor eſt, at ML maior quam MB, ergo reliqua LF, reliqua BC, minor. quod ſi punctum M cadat in E centrum, tum erunt MB, ML æquales, & remanebit ſimiliter LF minor quam BC. at ſi M punctum vltra centrum E ceciderit, tum ductis perpendicularibus ad puncta L, F, in ipſam LF rectam, oſtendetur ſegmentum ipſius BC dictis perpendicularibus comprehenſum, eſſe maius ipſa LF recta, ac proinde totam BC multo maiorem eſſe.

Sit iam data recta, tota extra circulum ad cuius angulum pertinere debet, terminanda, & inclinanda in partes dicti anguli, ita vt ſit citra communem ſemicirculorum, interſectionem: in hoc caſu data recta, minor eſſe debet media proportionali, inter ſegmenta baſeos ſemicirculi, in cuius caua peripheria terminatur.

Sint igitur quales quæruntur circuli AIC, BKD. dataque recta Z. & ſit factum, ducta nempe recta KIC, habens ſegmentum KI, æquale datæ Z. fiant vt prius AB, DF æquales. & ducatur perpendicularis AI, in rectam KC. tum EL (ex E, centro circuli BKD.) & FG in eandem quoque productā in H punctū, in circumferētia BHD, perpendiculares. erunt primum KI, GH æquales, eſt enim AC ad CI, vt CE ad CL, & componendo, permutandoque AE ad IL, vt CE ad CL, id eſt EF ad LG. & iterum permutando AE ad EF, vt IL ad LG. ſunt autem AF, EF, æquales. ergo & IL, LG æquales quoque

erunt,

erunt. atqui KL, LH, æquales ſunt, ergo & reliquæ KI, GH. Iam dico aggregatum KI in CF, CF in CI, KI in AC, eſſe ad differentiam BC in CD, & KI quadrati, vt AC ad CI.



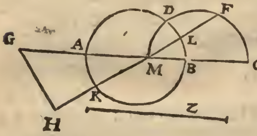
Eſt enim CF in CI æquale CG in CA. (nã vt CF ad CA, ita CG ad CI.) & aggregatũ CG in CA, KI vel GH in CA, eſt CH in CA. ergo KI in CF, CF in CI, & AC in KI ſimul, æqualia ſunt duobus, KI in CF, & CH in CA: at KC in CH, id eſt BC in CD, minus KI quadrato, eſt aggregatum IC in CH, & KI in CG. eſt autem KI in CF, ad KI in CG, vt CF ad CG, & CH in CA, ad IC in CH, vt CA ad CI, id eſt CF ad CG. ergo aggregatum kI in CF, CH in CA, id eſt kI in CF, CF in CI, & kI in AC, eſt ad aggregatum kI in CG, IC in CH, (id eſt differentiam BC in CD, & kI quadrati) vt AC ad IC: quod erat demonſtrandum. data itaque kI, dabitur & IC.

Determinatio manifeſta eſt: nam quadratum mediæ proportionalis inter BC, CD, æquale eſt rectangulo ſub kC, CH, hoc autem quadrato kI maius: ergo & dicta media proportionalis, ipſa kI maior erit.

Sed vlterius procurrat recta intercipienda, & caua vtriuſque peripheria, citra, vltraque ſemicirculorum cõmunes interſectiones finienda ſit, qualis in figura pro-

xime antepenultima, recta KF.

Repetatur eiuſdem figuræ conſtructio, ſitque KF interpoſita, rectæ datæ Z æqualis, quæ quidem maior eſſe non debet recta AC, nec minor recta, per alterá ſectionum, & dictum angulum tranſeunte, iiſdem circumferentijs terminata. erit igitur differētia GC in KF, & GM in M F, ad differentiam KF quadrati, & MB in MA, vt MC ad MF. Eſt enim GC in KF, æquale rectangulis GM in KF, & MC in kF, & GM in KF æquale eſt rectágulis GM in MF, i. HM in MC, & GM in Mk. atqui differētia aggregati HM in MC, GM in Mk, MC in KF, & HM in MC, eſt aggregatum GM in Mk, & MC in kF, differentia vero KF vel HL quadrati, & ML in Mk, eſt aggregatum KF vel HL in HM, & ML in MF. (vt poſt oſtendetur) & eſt aggregatum GM in kM, MC in kF, vel HL, æquale aggregato GM in KM, MC in HM, MC in ML, & MC in HM æquale GM in MF, erunt ergo GM in KM, MC in KF, æqualia GM in kM, GM in MF, (id eſt GM in KF.) & MC in ML. atqui GM in kF, ad KF in HM, eſt vt GM ad HM. & MC in ML, ad ML in MF, eſt vt MC ad MF (id eſt GM ad HM) ergo & aggregatum GM in KF, MC in ML (id eſt vt oſtenſum eſt, differentia GC in kF, & GM in MF.) eſt ad aggregatum kF in HM, ML in MF. (id eſt ad differentiam kF quadrati, & BM in MA.) vt MC ad MF. quod erat demonſtrandum, data itaque Z, dabitur & MF.



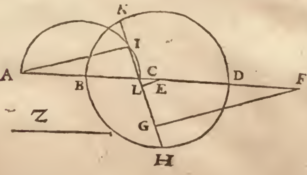
Eſſe autem differentiam kF quadrati & rectáguli MB

in MA, id eſt ML in Mk, æquale aggregato kF in HM, & ML in MF, ſic oſtenditur, eſt kF, vel HL quadratum, æquale rectangulis ML in HL, & HM in HL vel KF. ſed L:M in HL, minus ML in Mk, eſt ML in MF. (ſunt enim æquales Hk, LF.) ergo differentia KF quadrati, & rectanguli MB in MA, eſt aggregatum kF in HM, & ML in MF.

Eſt autem kF ipſa AC minor, nam LF minor eſt quã BC, vt ſupra oſtenſum eſt, & KL ipſa AB non maior, ergo tota kF, tota AC minor erit. maior vero eſt eadem, recta per alteram ſectionum, & deſignatum angulum tranſeunte, dictis peripherijs ſiue circulo ADB incluſa, eſt enim KL recta, ea ſemper maior, niſi punctum M in centrum circuli AkB cadat, ſiquidem angulus LMB, minor eſt angulo DMB.

Sin autem data recta, caua vtriuſque circuli peripheria claudenda, citra communes vtriuſque ſectiones interſerenda fuerit, qualis in proxime antepenultima figura recta IH, talis inſtitui poteſt analyſis, vnde eruetur quæſitum.

Repetatur dicta figura: eritque differentia rectanguli AC in IH & ſpatij quo differũt CF in IH, CF in CH, (i. CF in CI.) ad rectangulum BC in CD, vt AC ad CH.



Eſt enim vt ſupra rectãgulum CF in CI, æquale rectãgulo AC in CG. atqui AC in IH, minus

AC in CG, eſt æquale rectangulo AC in KC. eſt autem AC in kC, ad kC in CH, id eſt BC in CD, vt AC ad CH. ergo differentia rectangulorum AC in, IH, & CF in CI, (id eſt CF in IH, minus CF in CH) eſt ad rectangulum BC in CD, vt AC ad CH: data itaque IH: dabitur & CH. debet autem data recta nō maior eſſe recta per alteram ſectionum & deſignatum angulum tranſeunte, ijſdem peripherijs terminata, nam vt prius, ea maior eſt ipſa kCH niſi puncta, C, E, coierint. nec minor media proportionali inter BC, CD, quoniam quadratum HI, maius eſt rectangulo HCK.

Ne mihi hic obijce περιεργίαν, ſi caſus aliquos ſingulares alioqui, in plures diuiſi. id enim factum quia reſoluendo in diuerſas incidi æquationes. cæterum methodum generalem regrediendi ad eorundem omnium σύνθεσιν, harumque demonſtrationes, diſcat analyſta ex primo meo præmiſſo lemmate.

ALEXANDRI ANDERSONI
ABERDONENSIS VARIORVM PROBLEMATVM
Practice.

NOBILISSIMO, PRVDENTISSIMO, AC OPTIMO, DOMINO SVO, DOMINO MARTINO RVZE', EQVITI AVRATO,

Domino à BEAVLIEV, Longiumeau, Champeaux, Prezay, &c. Ordinum equeſtrium Regis Chriſtianiſſimi magno quæſtori, Metallifodinarum Galliæ magno præfecto, eidémque Regiæ Maieſtati à penitioribus conſilijs, & a ſecretis primo.

SI generis nobilitas non niſi virtute perficitur, quidni virorum omnium nobiliſſimum te dixerim? (vir omni nobilitatis & virtutum genere ornatiſſime) ſi fœlices, non niſi dies vltima, & extremum ſenium arguunt, cur non fœliciſſimum? pietatem, quinquaginta & amplius anni, pace belloque tranſacti, teſtentur: quibus nec imminentia pericula, publica ſiue priuala, nec effrenis licentia militaris, & impia caſtra, ne vel diem vnum, ſacroſanctam ἱερουργίαν, *tibi (niſi ægro fortaſſe) interrupêre. fidem in principem & patriã, bellorum ciuilium incendia loquantur: quibus miſerè deformatâ, & internecioni*

proximâ hac republicâ, tu non deſperata cum pluribus ſalute, illos deſeruiſti, ſed ſpe rebus afflictis maiore, virtute tantis cladibus ſuperiore, ijs continenter adfuiſti. fortitudinem, pericula quæ fortiter adijſti, ac ſuperaſti: magnanimitatem, labores quos conſtanter pertuliſti: prudentiam, ſuprema munia quibus ſumma cum laude functus es, prædicent. anteactæ ſic vitæ ſtatus inconcuſſus, debitaque ei gloria, fœlicem te proclament. Ego comitatem & benignitatem erga me tuam hic memoro, quæ tantæ ſunt, vt & hoc ipſo quoque generoſum te, ac magnificum teſteris. nam vt virtus omnis in arcta eſt, & aduerſa; ita comitas in tenues, benignitas in egenos, maxime ſplendeſcit. ſed in eo, quum generoſiſſimus & eximiæ indolis pronepos, ANTONIVS RVRE *ab Effiat (proles haud inficienda parenti)* παππῷον *parentalem partim perſenſit, quod animum ad honeſta natum, bonis etiam artibus inſtrui volueris, quo fremius ac certius in arduo hoc & accliui virtutis tramite, veſtigia ponat: tum ego hoc potiſſimum munere, quicquid ſiue ad famam, ſiue ad fœlicitatem ſperare potui, à te benignè conceſſum percepi. licet tuo magis exemplo, quam vllis aliorum præceptis ſiue monitis, per hunc paucis tritum callem ducas, ducemque ille ſuum adeo ſolicitè inſequitur, vt iam in ipſo renaſcentem te, poſitâ illâ ſenili exuuie, & princeps & patria geſtientes videant. ſed vt radios à ſole promanentes, denſiora corpora repercutiunt, non eius lumini augendo, ſed ſibimet illuſtrando: ſic ex hac benefactorum commemoratione, licet gloriæ tuæ accedere nihil poſſit, tamen vt ingratitudinis næuus omnis mihi detergeatur, ſilere non decet. Imo vero, ſignis & indicijs, quamuis (pro facultate) leuibus, teſtari conuenit. Accipe*

cipe

cipe igitur (vir nobiliſſime) hunc qualemcunque laborem, memoriæ in tot beneficia pertinacis, indicem ac teſtem: quem ea animi alacritate tibi offero, quâ illum, meque tibi acceptum ac gratum cupio, & ſpero. Vale. Lutetiæ Pariſiorum. VI. Kalend. Martias.

Tibi vt plurimum deuinctus,
ita in perpetuum deuotus,

ALEXANDER ANDERSONVS.

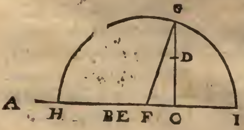
PROBLEMA I.

DAta compoſita ex media, & altera extremarum, è ſerie trium proportionalium, tum reliqua proportionali, diſcernere tres proportionales.

ſiue,

Data ſumma trium laterum trianguli rectanguli, & differentia hypotenuſæ et baſeos, diſcernere latera.

Sit recta AC compoſita ex media & vna extremarũ, eique ad angulos rectos CD extrema reliqua, oporteatque diſcernere proportionales. fiat ipſi CD æqualis CE. & producatur CD, in G, & CG media ſit proportionalis inter DC, CA. diuidatúrque CE bifariam in F. & centro F, interuallo FG, ducatur ſemicirculus H G I, ſecans rectam AC productam, in punctis H, I, & ſit ipſi CI, æqualis CB. dico AB, BC, CD, eſſe proportionales quæſitas.



Quoniã enim C G, media proportionalis ponitur inter DC, CA, erit CG quadratum æquale rectangulo DCA. ideoque & rectãgulum DCA, rectangulo HCI, æquale, & propterea vt HC ad DC, id eſt (ex conſtructione) ad EC, ita AC ad CI, id eſt ad BC, & conuertendo vt EC ad HC, ita BC ad AC. & diuidendo vt

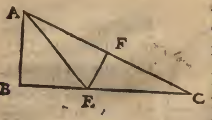
EC ad EH, ita BC, id eſt HE (ſunt enim HB, EC, differentiæ extremarum æquales.) ad BA. & proinde BC vel HE, media proportionalis inter EC vel DC, & AB. quod erat faciendum.

Eodem modo, in triangulo F GC rectangulo, data ſumma trium laterum, id eſt rectis HC, CG. & differẽtia hypotenuſæ & baſeos, id eſt recta CI, diſcernetur latus CG. & reliqua vt ſequitur.

Problema II.

Datis trianguli rectanguli, vno latere circa angulum rectum, tum compoſita ex hypotenuſa, ac reliquo: diſcernere latera.

Sit datum latus circa angulum rectum AB, compoſita ex hypotenuſa ac reliquo latere, BC, priori ad angulum rectum adiuncta, ducaturque hypotenuſa AC, quæ bifariam ſecetur in F, a recta FE, in eandem perpendiculari, & occurrente baſi BC, in E puncto. dico BE eſſe reliquum latus, & EC hypotenuſam.

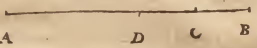


Ducatur enim recta AE. & quoniam recta AC bifariã ſecatur a perpẽdiculari EF, erunt latera, EC, EA æqualia, lateraque quæſita BE, EA vel EC, quod erat faciendum.

Problema III.

E ſerie trium proportionalium, data vna extremarum, tum differentia mediæ ac reliquæ: inuenire proportionales.

Sit primum data maior extremarum AB, differentia mediæ ac minoris CB. rectangulo AB in CB, æquale fiat rectangulum AD in DB. eruntque proportionales quæſitæ AB, DB, DC.



Eſt enim ex conſtructione AB ad AD, vt DB ad BC. & conuertẽdo AB ad DB, vt DB ad DC, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

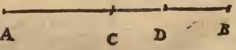
Hinc liquet AB minorem eſſe non poſſe, quadruplo ipſius BC: nam diuiſa eſt AB, in D, & rectãgulum ADB, factum æquale rectangulo ABC, maximum autem rectangulum ex ſegmentis AB, eſt quadratum dimidij, id eſt quarta pars quadrati AB.

Sit iam data minor extremarum DC, tum differentia mediæ & maioris AD. fiat rectangulo ADC, æquale rectangulum DB in CB. (dato enim rectangulo ſub extremis, & differentia extremarum, inuenire extremas, oſtenſum eſt ſupra (eruntque proportionalis quæſitæ AB, DB. eſt enim ex conſtructione AD ad DB, vt CB ad DC. & componendo AB ad DB, vt DB ad DC. quod erat faciendum.

Problema IIII.

D*Ata ex tribus proportionalibus, differentia extremarum, tum ſumma mediæ, & alterius extremæ: diſcernere proportionales.*

Sit AC differentia data, BC ſumma mediæ & alterius extremæ. Fiat vt BA ad BC, ita DA ad DB. dico iam eſſe DA ad DB, vt DB ad DC.



Eſt enim DA ad DB. vt BA ad BC ex conſtructione & permutando DA ad BA, vt DB ad BC. & conuertendo BA ad DA, vt BC ad DB. & diuidendo BD ad DA, vt CD ad DB. & iterum conuertendo DA ad DB, vt DB ad CD, quod erat faciendum.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

Eadem eſt ratio ſecandi datam rectam infinitam, duobus punctis notatam, ita vt è ſegmentis, datis duobus punctis, inuentoque terminatis, vnius quadratum, ad rectangulum ſub reliquâ & datâ externâ, datam teneat rationem. Nam tum datæ externæ analoga, in data ratione, ſemper eſt vna extremarum vnde ſi primo epitagmate, iubeatur data recta ita ſecari, inter data duo puncta; dabitur externæ analoga vna extremarum, & ſegmentum duobus punctis datis comprehenſum, erit ſumma mediæ & alterius extremæ, eique ſatisfaciet primum noſtrum problema: ſin altero epitagmate, iubeatur ita ſecari vt dictum eſt, extra data puncta: erit

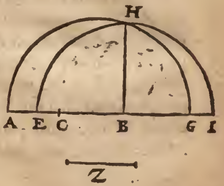
ſegmentum datis punctis terminatum, differentia mediæ & alterius extremarum, maioris quidem, cum ſegmentum cuius quadratum quæritur proximo puncto terminandum eſt, at minoris, quum reliquo vlteriori idem terminari iubetur. praxin vide in tertio noſtro problemate.

Problema V.

Datam rectam terminatam ſemel ſectam vtcumque ita denuo ſecare, vt rectangulum ſub ſegmentis quibuſlibet, duobus punctis datis, inuentoque terminatis, æquale ſit rectangulo ſub ſegmento, reliquo puncto dato, inuentoque, terminato, & data externa.

Sit data recta AB, ſecta vtcunque puncto C. data externa Z, quęraturque primum datæ externæ coefficiens, ſegmentum, in quo datum punctum medium non eſt. fiant ipſi Z æquales BG, CD. & ſuper rectam AG deſcribatur ſemicirculus A H G. ducaturque perpendicularis BH, occurrens circumferentiæ iam ductæ in H. & DB bifariam diuiſa in K, centro K, interuallo K H. ducatur ſemicirculus EHI. dico E eſſe punctum quæſitum.





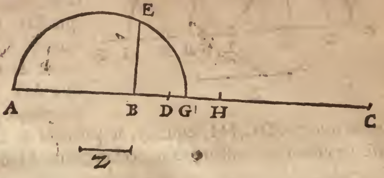


Eſt enim ex conſtructione rectangulum ABG, id eſt AB CD, æquale rectangulo EBI, id eſt EB, ED. (eſt enim EK æqualis ipſi KI, & KD, ipſi KB, ex conſtructione, ergo & reliquę, vt in prima figura, vel totę vt in ſecunda, BI, ED, ęquales erunt.) auferatur vtrinque idem commune, CD in EB. relinquentur AE in CD id eſt Z. & EB in EC æqualia: eſt igitur, E, punctum quæſitum quod erat faciendum.

Quod ſi vt in tertia figura, recta data Z, ipſi CB fuerit æqualis, tum conſtructione vt prius abſolutâ, BE, ipſi BH æqualis, problema abſoluet: ſunt enim EC GI æquales: (quoniam BE, BI, itemque BC, BG, æquales ſunt.) Vnde ſi ex æqualibus, nimirum EB quadrato, & rectangulo AB in BG, vel CB, auferatur idem commune EB in CD, remanebant æqualia AE in CB, & EB in EC. quod erat faciendum.

Secundus autem caſus erit quum reliquum ſegmentum, in quo eſt datum punctum medium, datæ externæ coefficiens quæritur: Sit itaque AC recta data, ſecta B puncto. Dataque externa Z. oportet autem differentiam ipſius Z, & BC, non minorem eſſe duplo eius, quæ poteſt AB in Z. fiat ipſi Z æqualis BG. ductoque ſemicirculo AEG, erigatur perpendicularis BE, ſecās circūferentiā iam ductā in E. tum ita diuidatur GC in H, vt recta

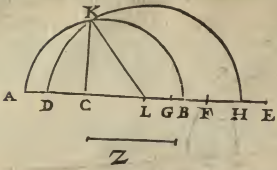
ctaBE media ſit proportionalis inter eius ſegmẽta GH, HC. & ipſi GH, fiat æqualis BD. dico, D, eſſe punctum quæſitum.



Eſt enim ex conſtructione rectangulum ABG, rectangulo GHC æquale, quibus addatur idem cõmune, BGH, & ex aggregato ABG & BGH, vel BG in BD, ex conſtructione, fiet AD in BG id eſt Z, æquale aggregato GHC, & BGH, vel DC in GH ex conſtructione, id eſt BD in DC. eſt igitur D, punctũ quæſitum quod erat faciendum.

Tertius caſus erit, quum quæritur intermedium ſegmentum, datę externæ coefficiens.

Sit itaque data recta AB, ſecta puncto C. dataque externa Z, cui ęquales fiant CG, BE. tum ipſi AC ęqualis fiat EF. ducaturque ſemicirculus AKB; & erigatur perpendicularis CK, ſuper rectam AB, occurrens ſemiperipheriæ, in K. tum diuiſa recta CF bifariam in l, centro l, interuallo LK, ducatur circumferẽtia DKH. dico punctum D, eſſe quęſitum.



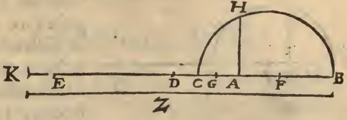
Qnoniã enim LC, LF, ęquales ſunt, ex cõſtructione, itẽque LD, LH, & totę LA, LE, erunt & reliquę AD, HE ęquales, & propterea quoque DC, FH, ęquales, ac proinde & CH, DF. eſt autem ex conſtructione, rectangulum ACB, rectangulo DCH, æquale: & ex æqualibus ablato communi DCB, relinquentur AD in CB, DC, in BH æqualia: quibus, ſi addatur idem commune AD in DC, vel HE in FH, erit totum ADB, æquale toti DC in BE id eſt Z. eſt itaque D, punctum quæſitum quod erat faciẽdum.

Problema VI.

Datam rectam terminatam ſemel ſectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum ſub tota aucta, & alterutro ſegmento cum augmento, æquale ſit rectangulo, ſub augmento & data externa.

Sit data AB, ſecta in F. dataque externa Z. oportet autem ipſius Z exceſſum ſupra compoſitam ex AB, AF, non minorem eſſe duplo eius, quę poteſt id quod continetur ipſis BA, FA. fiat AC ipſi AF æqualis: & ducatur ſemicirculus CHB: tum recta perpendicularis AH, occurrens peripheriæ ductæ in H. ſitque KB æqualis ipſi

Z,cuius exceſſus KC,ita diuidatur in D, vt recta AH, media ſit proportionalis inter eius ſegmenta KD, DC. ſitque ipſi DC, æqualis AG. dico G, eſſe punctum quæſitum.



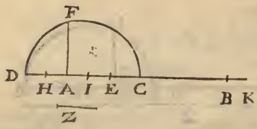
Quoniam enim CA, AF, æquales ſunt, itemque DC, GA, erunt DA, GF æquales. eſt autem ex conſtructione rectangulum CAB, rectangulo CAB, rectangnlo CDK, (vel KEC, facta KE, ipſi DC, æquali) æquale, quibus ſi addantur communia GA in GF, GAB, id eſt GA in DB, fient GF in GB, KE id eſt GA in KB, inter ſe æqualia. eſt igitur G, punctum quæſitum quod erat faciendum.

Problema VII.

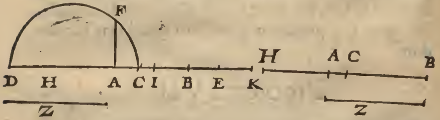
DAtam rectam lineam ſemel ſectam vtcunque ita augere, vt rectangulum ſub tota aucta & augmento, rectangulo ſub alterutro ſegmento cum augmento, & data externa, æquale ſit.

Sit data recta AB, ſecta C puncto, ſitque data externa Z. fiat ipſi Z, æqualis DA. & rectangulo DAC, ſit æquale quadratum AF. ſintque DA, AE, æquales. tum data EB differentia extremarum, & AF media inueniantur pro-

portionales IE, EK. & ſi AE, ipſa AB, minor fuerit, fiat HA, ęqualis minori EI, vt in prima figura. dico H eſſe punctum quæſitum.



Eſt enim rectangulum IEK, rectangulo DAC æquale, ex cõſtructione, & rectæ IE, Bk, æquales (eſt enim EB, differentia extremarum) æqualibus igitur rectangulis, IEk, DAC, addatur commune IE in AE, vel DA, eruntque æqualia IE in Ak, ideſt, HA in HB, (ſunt enim IE, HA æquales, itemque HB, Ak, ex conſtructione) & HC in DA, ideſt Z. eſt itaque H, punctum quæſitum. quod erat faciendum.



Sit iam Z, vel AE, ſiue DA, maior quam AB, vt in ſecunda figura, reliquiſque vt prius peractis, fiat HA, æqualis maiori extremæ IE: eruntque vt prius rectangula DAC, IEK ideſt HA in IB, ex conſtructione æqualia. æquales quoque ſunt rectæ, AI, DH, ſi quidem DA, AE ponuntur æquales, itemque IE, HA. æqualibus igitur DAC, HA in IB, addatur idem commune HAD, id eſt HA quadratum, plus HA in AI, erunt tota DA in HC, HA in

BH inter ſe æqualia.

Sin autem Z, ipſi AB, æqualis fuerit, vt in tertia figura, fiat rectangulo BAC, æquale quadratum HA, quibus addatur idem commune, HA in AB, eruntque æqualia BH in HA, & HC in AB, quod erat faciendum.

Problema VIII.

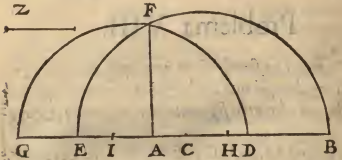
DAtam rectam ſemel ſectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum ſub tota aucta, & data externa, æquale ſit rectangulo, ſub alterutro ſegmento cum augmento, & augmento.

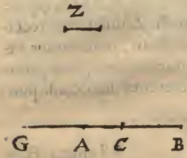
Sit recta data AB, ſecta C puncto, dataque externa Z, cui æquales fiant EA, AH. ſitque rectangulo EAB, ęquale quadratum AF, tum data AF media, & differentia rectarum AC, AH, differentia extremarum, inueniantur extremæ GA, AD. & ſi HA ipſa AC minor fuerit, vt in prima figura, fiat GA ęqualis minori extremæ dico, G, eſſe punctum quęſitum.



Eſt enim rectangulo EAB, ęquale rectangulum GAD, ex conſtructione, addatur vtrique commune EA in GA, eruntque æqualia EA in GB, & GA in ED vel GC (ſunt enim GE, CD, inter ſe æquales, nam HC, ponitur diffe-

rentia extremarum, ergo GA, æqualis ipſis AH, CD ſimul; & EA, ipſi AH æqualis eſt ex conſtructione, vnde relinquitur GE, ipſi CD æqualis, ergo & totæ ED, GC inter ſe quoque æquales erunt.) eſt itaque G, punctum quæſitum quod erat faciendum.





At ſi EA, ſiue Z, ſiue AH, vt in ſecunda figura, maior fuerit ipſa AC, conſtructione vt prius abſoluta, fiat GA æqualis maiori extremæ eruntque iterum rectangula EAB, GAD inter ſe æqualia, quibus addatur idem commune, GA in EA vel CI, (ſunt enim AH, AE, æquales ex conſtructione, & CH differentia extremarum, cui ſi æqualis fiat AI, relinquetur EI, AC æquales & totæ EA, CI æquales quoque) fient GB in EA, GA in ED vel GC, (ſunt enim AD, GI, æquales, & EA, IC, vnde & totæ ED, GC, æquales quoque erunt) æqualia quod erat faciendum.

Quod ſi data externa Z, æqualis fuerit ipſi AC ſegmento, fiat ractangulo CAB, æquale quadratum GA. quibus addatur idem commune CA in GA, fientque

CA in GB, GC in GA inter ſe æqualia. & G punctum quęſitum, quod erat faciendum.

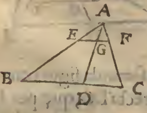
ΠΌΡΙΣΜΑ.

Eadem erit operatio, ſi iubeatur data vt prius recta, ita ſecari, vt rectangulum ſub duobus ſegmentis quibuſcunque, datis duobus punctis, inuentoque contentis, ad rectangulum, ſub ſegmento, reliquo puncto dato, inuentoque comprehenſo, & data externa, datam teneat rationem: tum enim datæ externę, in data ratione analoga, eſt illa, quam nos hic poſuimus externam, in ratione æqualitatis.

LEMMA.

SI à vertice trianguli, ducatur recta vtcunque in baſin, ſecabit ea, rectas omnes triangulo inſcriptas, & baſi parallelas, proportionaliter baſi.

Sit triangulum ABC. rectaque inſcripta baſi parallela EF. & recta à vertice in baſin AD, ſecans baſi parallelam EF, in G. dico eſſe EG ad GF, vt BD ad DC.

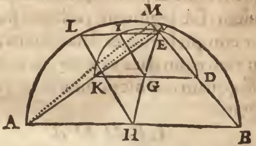


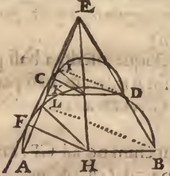
Sunt enim DC ad GF, BD ad EG, vt DA ad GA. & permutando, DC ad DB, vt GF ad EG. quod erat demonſtrandum.

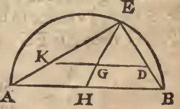
LEMMA.

SI per extremitates diametrorum parallelarum, circulorum inæqualium, duæ rectæ lineæ tranſeuntes, in eodem pũcto coierint, rectæ a dicto puncto eductæ, ad datos circulos, vel ſimul vtrumque tangent, vel ſimilia auferent ſegmenta.

Sint duo circuli inęquales, ſuper diametros parallelas AHB, KGD, quarum extrema AK, BD, rectæ AKE, BDE, connectentes, coeant in puncto E. dico rectas omnes à puncto E eductas, ad dictos circulos, eoſdem, vel ſimul tangere, vel ab ijſdem ſimilia auferre ſegmenta.







Tangat primum recta ECF, in ſecunda figura circulum KCD, in C puncto, & ducatur recta EG, quę per H, alterius circuli centrum, tranſibit. (per precedens lemma.) ſintque ad rectam ECF, perpendiculares, GC, HF. quoniam igitur eſt vt EG ad EH, ita CG ſemidiameter, ad AH ſemidiametrum, atqui vt EG ad EH, ita CG ad FH ex conſtructione. eſt ergo FH quoque ſemidiame-

ter

ter circuli AFB. & EF, perpendicularis ipſi FH, tanget circulum AFB. Iam ſecet recta EIK LA, circulos eoſdē, (nam ſi alterum ſecat, ſecabit & reliquum, ſiquidem vt demonſtratum eſt, ſi vnum tangit, tangit & reliquum.) anferàtque ſegmenta KI, AL, quæ dico ſimilia. eſt enim vt prius, EG ad EH, vt KG ad AH; parallelæ igitur KG, AH, IG, HL, & anguli in centris KGI, AHL inter ſe æquales. rectæ igitur ab E puncto eductæ, vel ſimul vtrūque tangunt, vel ſimilia auferunt ſegmenta, quod erat demonſtrandum.

In prima figura, eſt quoque EG ad EH, vt KG ad AH, id eſt IG ad LH, quare IG, LH parallelæ, & anguli in centris IGE, LHE æquales. vnde patet propoſitum.

In tertia figura, vbi angulus ad circumferentiam AEB, rectus eſt, eodem modo oſtendetur angulos in centris eſſe æquales: eſt enim EG ad EH, vt minor diameter ad maiorem. Si ergo per extremitates diametrorum parallelarum, &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

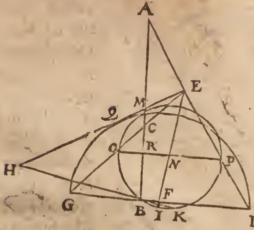
Ex prioribus figuris patet, ſiquidem angulus E fuerit obtuſus, vt in prima figura, ipſum intra circulos cadere: quoniam perpendiculares AM, KN, cadunt extra triangula AEB, KED. è contra, ſi E angulus fuerit, acutus, cadet extra dictos circulos, vt in ſecunda figura, nā perpēdiculares DI, BL cadunt intra eadē triangula. ſi denique angulus E, fuerit rectus, erit ad ſemicirculorum peripherias, vt in tertia.

Problema IX.

Datam rectam terminatam, ſemel ſectam vtcunque, alibi iterum ſecare, vt rectangulum ſub duobus ſegmentis ad punctum quæſitum, duoque quælibet data terminatis, ad quadratum ſegmenti reliqui, eodem quæſito, datoque reliquo, comprehenſi, datam teneat rationem.

Sit data recta AB, ſecta C puncto, iterumque ſecanda in puncto, quod ſit R, vt (primo) rectangulũ ARC, ad quadratum RB, datam teneat rationem AB ad BD. ſit BD perpendicularis ipſi AB, in puncto B. ducaturque recta AD, tum continuetur recta BD, in G, vt ſit BG ipſi BC æqualis. & ducatur recta GC, quæ producatur, donec occurrat rectæ AD, in E puncto, & ſit diuiſa GD bifariam in F, ductaque recta EF, tum à puncto B, in rectam EF, ducatur perpendicularis BI, protracta vtrinque quantumlibet, fiatque ipſi BI æqualis IK. & centro F, interuallo FG ductum ſemicirculum, tangat recta EQ, in Q puncto, producta donec occurrat rectæ BIK protenſæ in H. (nam quoniam hic ponimus rationem maioris inæqualitatis, rectamque AB maiorem quam BD, erit angulus GED acutus: eſt enim ACE ſemirectus & CAE ſemirecto minor, proptereaque CEA recto maior, & reliquus CED recto minor, ac proinde punctum E, cadet extra ſemicirculum GQD) tum rectangulo BHK, fiat æquale quadratũ HM. & rectæ HQM, in puncto M, perpendicularis ſit MN, occurrens rectæ EF, in N puncto, per quod, ipſi GBD parallela ducatur ORNP, ſecans rectas GCE, BCA, DEA, in punctis O, R, P, dico R eſſe punctum quæſitũ:

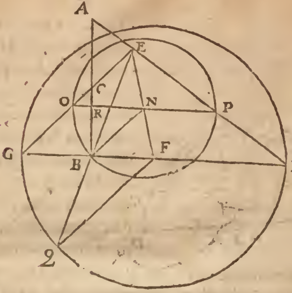
eſſe namque ARC rectangulum, ad BR quadratum, vt AB, ad BD.



Quoniam enim eſt rectangulum KHB, quadrato HM æquale, erunt puncta B, k, M, in circulo cuius centrum N punctũ, quemque tangit recta HM, eiuſque diameter erit OP, (ex præmiſſo lemmate) quæ normalis eſt ad rectam datam AB. erit igitur quadratum RB, rectangulo ORP æquale eſt autem rectangulum ARC, ad rectangulũ ORP, ideſt CRP (ſunt enim CR, OR æquales quia anguli COR, OCR æquales ſunt ex conſtructione) vt AR ad RP, ideſt AB ad BD: ergo & rectangulum ARC, ad RB quadratum, eſt vt AB ad BD. quod erat faciendum.

Sit iam data ratio minoris inequalitatis, id eſt AB minoris ad BD maiorem. fiatque vt prius BG ipſi BC æqualis. ducanturque rectæ GCE, AED. & diuiſa GD bifariam in F, ducatur recta EF tum centro F, interuallo FG, ducatur circulus, GQD. & per puncta B, E, agatur recta EBQ, occurrens circumferentiæ GQD, in Q puncto, a quo, ad centrum F, ducatur recta QF, cui parallela educatur à puncto B, quæ ſit BN, occurrens rectæ EF, in N puncto, per quod agatur ORNP recta parallela ipſi GD, occurrẽſque rectis GCE, ACB, AED, in punctis O, R, P. dico

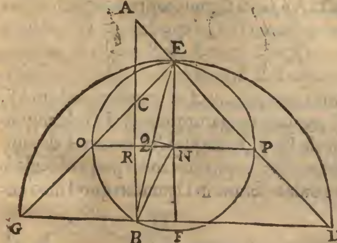
R eſſe punctum quæſitum.



Centro N, interuallo ON vel NP, ducatur circulus OBP, qui per B punctum neceſſario trāſibit, eſtenim vt FE ad NE, ita FG ad NO, & ita FQ id eſt, FG, ad. BN: ſunt itaque NO, NB æquales, & circulus ex centro N, interuallo NO vel NP deſcriptus, tranſit per punctum B. quoniam iam ſunt puncta OBP in circumferentia circuli cuius centrum N, diameter OP, ex præ demonſtratis: erit quadratum RB, rectangulo ORP, æquale. eſt autem rectangulum ARC, ad rectangulum ORP, vel CRP (ex conſtructione) vt AR, ad RP, id eſt AB, ad BD. ergo & rectangulum ARC, ad quadratum RB, erit quoque vt AB ad BD. quod erat faciendum.

Sed ſit data ratio æqualitatis, eademque repetatur conſtructio quæ prius, niſi quod ducta recta BE, diuidatur bifariam in Q. ducaturque recta QN, ipſi BE perpendicularis, occurrens rectæ EF, in N, & per punctum N ducatur ORNP, parallela ipſi GBFD, ſecanſque rectas

GOCE, ACRB, AEPD., in punctis O, R, P. dico adhuc R eſſe punctum quæſitum.



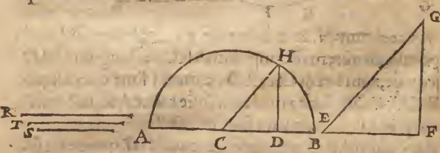
Sunt enim ex conſtructione EN, NB æquales, & ex præmiſſo lemmate puncta OBP in circulo cuius diameter OP, eiuſque centrum N. & quadratum RB, rectangulo ORP æquale. eſt autem rectangulum ARC, rectangulo ORD æquale, nam latera CR, RO, æqualia ſunt quia anguli ROC, COR ſunt æquales, itemque rectæ AR, RP æquales quia AB, BD æquales ſunt ex conſtructione. ergo rectangulum ARC, quadrato RB æquale eſt, quod erat faciendum.

Atque hic primus caſus eſto, quum nimirum ſecandum eſt alterutrum ſegmentorum datorum, ita vt rectangulum ſub ſegmentis, duobus datis proximis punctis & quæſito terminatis, comprehenſum, ad reliqui ſegmenti eodem quæſito, reliquoque extremo puncto dato terminati, quadratum, datam teneat rationem.

Secundus caſus erit, quum alterum datorum ſegmentorum ita ſecandum eſt, vt rectangulum ſub extremis ſegmentis quæſitis, ad quadratum intermedij ſegmenti,

datam teneat rationem, quod quidem facillime ſic abſoluetur.

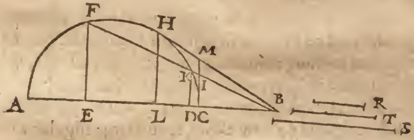
Sit data recta AB, ſecta C puncto, iterumque ſecanda in D, vt rectangulum ADB, ad quadratum DC, datam teneat rationem R ad S. inter R & S media ſit proportionalis T. & ſuper AB diametrum ſemicirculus deſcribatur AHB, tum componantur ad angulum rectum EF, FG, ipſis R, T, æquales iungaturque recta EG. & angulo FEG, fiat æqualis BCH, rectaque CH occurrat circumferentiæ, in H puncto, a quo deſcendat perpendicularis in baſin ACB eandem ſecans in D puncto quod dico eſſe quæſitum.



Quoniam enim ex conſtructione eſt GF ad FE, id eſt R ad T, vt HD ad DC, erit quoque vt R quadratum ad T quadratum, ita HD quadratum ad DC quadratum, ideſt ita ADB rectangulum ad DC quadratum, ſed vt R quadratum ad T quadratum, ita R recta ad S rectam, ergo vt R recta ad S rectam, ita ADB rectãgulum, ad DC quadratum, quod erat faciendum.

Tertius caſus eſt, quum alterum ſegmentum datum ita ſecandum eſt, vt rectangulum ſub eiuſdem partibus, ad quadratum reliqui totius ſegmenti, datam teneat rationem. quod pari cũ priore facilitate perficietur, determinatio clarius patebit poſt demonſtrationem ſequentis operationis.

Sit igitur data recta AB, ſecta C puncto, eiuſque ſegmentum alterum vt AC, ſecandũ in D, vt rectangulum ADC, ad quadratum DB, datam teneat rationem R ad S. ſuper AC ducatur ſemicirculus, tum inter R & S media proportionalis ſit T. & fiat vt R & T, ita CI ad CB, quæ angulum rectum contineant BCI. ducaturque recta BI, ſecans circumferentiam iam ductam, in punctis K, F, a quibus demittantur perpendiculares KD, FE, in baſin AB: & vtrumvis punctum E, D, problemati ſatisfaciet.



Eſt enim vt R ad T, ita CI ad CB, id eſt KD ad DB, & FE ad EB. & vt R quadratum, ad T quadratum, ideſt R ad S, ita KD quadratum, ad DB quadratum, & ita FE quadratum, ad EB quadratum, ideſt ita ADC rectangulum, ad DB quadratum, & ita AEC rectangulum, ad EB quadratum, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Hinc ſequitur, ſi ducatur recta BH, tangens ſemicirculum AFHKC in H puncto, & demittatur perpendicularis HL in baſin AC, rationem HL quadrati, id eſt rectanguli ALC, ad quadratum LB, eſſe ſingularem & maximam: quare rationem datam R ad S, non maio-

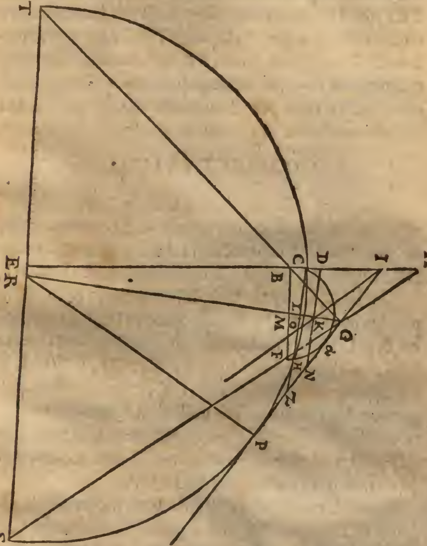
rem eſſe debere, dupla eius quæ eſt HL ad LB, vel MC, ad. CB ſi nimirum recta CI producta, ſecet tangentē in M. eſt enim maior ratio MC quadrati, ad CB quadratum, quàm IC quadrati ad CB quadratum.

Problema X.

Datam rectam terminatam ſemel vtcunque ſectam, ita augere, vt rectangulum ſub tota aucta & augmento, ad quadratum compoſitæ ex augmento & interſegmento, datam teneat rationem.

Sit recta data AB, ſecta vtcumque puncto C, ratioque data AB ad BF maioris primum inæqualitis, quæ ad angulum rectum conueniant augendaque ſit AB, vel producenda in E, vt rectangulum AEB, ad quadratum EC, datam teneat rationem AB ad BF. ducatur recta AF, producaturque quantumlibet, & diuidatur angulus ABF rectus æqualiter per rectam BG, productam quoque quantumlibet, & occurrentem rectæ AF in G puncto, tum ſecetur recta BF bifariam in M, & agatur recta GM, protenſa vtcunque, & centro M, interuallo MB, vel MF, ducatur ſemicirculus BαF, quem tangat in α recta GA (eſt namque G punctum extra ſemicirculum BαF, vt hactenus oſtenſum eſt.) producta quoque quantumlibet, tum à puncto C, ad rectam GM ducatur perpendicularis CL, producta donec ſecet tangentem Gα, in Z puncto, & ipſi CL fiat æqualis LH. & rectangulo CZH ſit æquale quadratum ZP, in recta tangente GαZP. tum à puncto P ducatur PR perpendicularis ipſi GAZP, ſecanſque rectam GMR in R puncto, & à puncto R ad

R ad AB productam ducatur perpendicularis RE, ſecans rectas GB, GF productas, in punctis T, S. dico E eſſe punctum quæſitum.



Centro enim R, internallo RS, vel RT, ducatur ſemicirculus TPS, qui tanget rectam G&ZP, in P puncto, ex pręmiſſo lemmate. & eſt rectę ZP quadratum, ęqua-

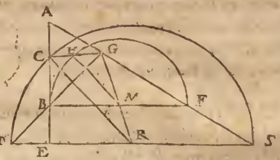
le rectangulo CZH, ex conſtructione. ſunt igitur puncta C, H, P in circulo TCHPS & RET, ipſi EBC perpendicularis. erit igitur quadratum EC, æquale rectangulo TES, ideſt BES, (eſt enim angulus TBE ſemirectus ex conſtructione, ergo & reliquus BTE illi æqualis ſiquidem BET rectus eſt, quare BE, ET æquales) eſtautem rectangulum BEA, ad rectangulum BES, vt EA ad ES, id eſt AB ad BF, ergo & rectangulum BEA ad quadratum EC, eſt vt AB ad BF. quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Hinc patet, ſi recta GA producatur, donec occurrat rectæ AB, in I, & diuidatur recta CZ, bifariam in O, ducaturque IO, ſecans rectam GM in K, & acta demum DKN ipſi CZ parallela, & ſecante rectas IC, GM, IG, in punctis D, K, N, eſſe DK, KN æquales, & lineas à punctis inter A, & D eductas, rectiſque ID, IG, terminatas, & in GM perpendiculares, inæqualiter ſecari à recta GM, maiuſque ſegmentum eſſe inter ID, GK rectas, cui æquale abſumptum vltra GK, excurret vltra tangentem Gα: ac propterea in illo caſu, problema impoſſibile eſſe. eſt itaque hic ſingularis & maxima ratio BD ad DA, id eſt punctum datum C, data ratione AB ad BF, non debet aſſignari inter D, & A.

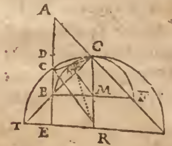
Sit iam data ratio AB ad BF minoris inęqualitatis, reliquis vt ſupra peractis, erit angulus BGF obtuſus, vt oſtenſum eſt, cadetque intra ductos, vt ſupra ſemicirculos. ſit itaque centro M, interuallo BM, ductus ſemicirculos BHF, & a puncto C dato, ad angulum G,

ducta recta CG ſecans peripheriam BHF, in H puncto, à quo ad M centrum, ducatur recta HM, cui à puncto C, parallela agatur CR, ſecans rectam GM productam, in R puncto, à quo, ducatur RET, perpendicularis ad AB productam, & cætera vt prius, dico adhuc, punctum E eſſe quæſitum.



Sunt enim ex præmiſſis, puncta T, C, S, in circulo cuius diameter TRS, ad quam perpendicularis eſt CE, ex conſtructione: ergo rectangulum TES ideſt BES, æquale erit quadrato CE. atqui rectangulum AEB, eſt ad rectangulum BES, vt AE ad ES, id eſt AB ad BF. ergo rectangulum AEB ad quadratum EC, erit quoque vt AB ad BF, quod erat faciendum.

Eademque erit & factio, & demonſtratio, ſi ratio offeratur æqualitatis: debet autẽ tum BC, minor eſſe dimidio ipſius AB, vt ex ſequenti ſchemate perſpicere eſt.



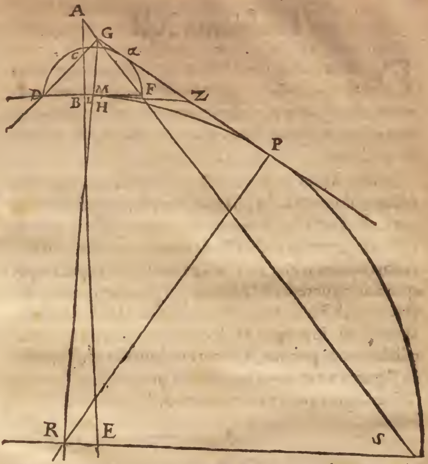
Nam ſi datum fuerit D punctum medium rectæ AB, recta ducta DG, tangeret circulos BGF, TGS, propterea que centrum punctorum D, G, in recta GM reperiri non poſſet. & multo minus ſi datũ

punctum eſſet inter D, & A. poteſt quoque centrum R in hac figura reperiri, ſi recta CG diuidatur bifariã, a perpendiculari OR.

Problema XI.

DAtam rectam ſemel ſectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum ſub tota aucta & altero ſegmẽto cum adiecta, ad quadratum adiectæ, datam teneat rationem. oportet autem rationem datam eſſe inæqualitatis maioris.

Sit data recta AB, ſecta puncto C, eademque augenda ſiue producenda in E, vt ratio rectanguli AEC, ad quadratum EB, ſit eadem quæ eſt AB ad BF. conueniãt hæ ad angulum rectum ABF, ducaturque AF producta vt libet, & fiat angulus BCD ſemirectus, ſecetque recta DC producta, rectam AF in G pũcto. & eidẽ GCD occurrat recta FB in D. tum diuiſa recta DF bifariam in M, ducatur recta GM protenſa in infinitum. & à puncto B agatur recta BL, perpendicularis in ipſam GM, quæ protrahatur quantumlibet in Z. fiatque ipſi BL, æqualis LH. tum centro M, interuallo MD, ducatur ſemicirculus DαF, quem tangat recta GαZ, à puncto G, occurrens rectæ DLHZ, in Z puncto. & rectangulo DZH, fiat æquale quadratum ZP, in tangente GαZP. & à P puncto ducatur perpendicularis in ipſam GαZP, quæ ſit PR, occurrẽs rectæ GM, in R, a quo pũcto R, ducatur RE perpendicularis in ipſam AB productam, eritque E, punctum quæſitum.



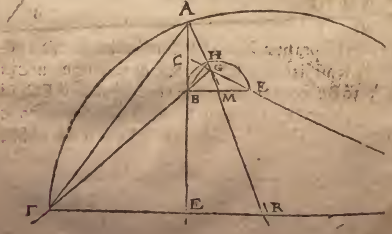
Nam vt ſupra puncta B,H,P, ſunt in circulo cuius cẽtrum R, ſemidiameter RP, vel RS, & rectangulum CES quadrato BE æquale. eſt autem rectangulum AEC, ad rectangulum CES, vt AE ad ES, ideſt AB ad BF. ergo & rectangulum AEC, ad quadratum EB, erit vt AB ad BF, quod erat fciendum.

Determinatio per ſe manifeſta eſt.

Problema XII.

DAtam rectam ſemel ſectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum ſub compoſita ex altero ſegmēto cum augmento, et augmento, ad quadratum totius auctæ, datam teneat rationem. oportet autem rationem datam, eſſe minoris inæqualitatis.

Sit data AB, ſecta puncto C, producendaque in E, vt rectangulum CEB, ad quadratum AE, rationem habeat datam CB ad BF, quæ conueniant ad angulum rectum CBF. ducaturque recta CF. & fiat angulus FBG, ſemirectus. occurratque recta BG, rectæ CF, in G pūcto, per quod ducatur recta AG, ſecans peripheriam, centro M. (vbi recta BF biſſecatur) & interuallo MB, vel MF decircinatam in puncto H. ducaturque recta BH, cui parallela exeat à puncto, A, ſecans rectam GB productam, in T puncto, a quo ad rectam AB productam, ducatur TE, eritque E punctum quæſitum,



Sunt enim ex prædemonſtratis puncta T, A, in circulo cuius centrum R, & ſemidiameter TR, & angulus AER rectus, ex conſtructione, quadratum igitur EA, æquale erit rectangulo ſub TE vel BE & reliquo diametri ſegmento. (quod hic ſpatij anguſtia deſcribere non patitur) eſt autem CEB rectãgulũ ad rectangulum ſub BE & dicto ſegmento, vt CE ad dictum ſegmentum, ideſt vt CB ad BF. ergo rectangulum CEB, ad quadratum AE erit vt CB ad BF. quod erat faciendum.

Ad reliqua determinatę ſectionis problemata, χειραγωγὸν hic tibi damus præmiſſam effectionem noſtram geometricam, cuius ductu, hanc viam quantumuis ſalebroſam aut aſperam, facillime peruades, his præmiſſis principijs.

Magnitudines ſub ijſdem altitudinis & baſibus, inter ſe ſunt æquales.

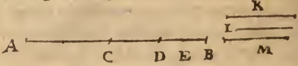
Si fuerit vt recta ad rectam, ita rectangulum ad rectangulum, ſolidum factum ex ſecundo in tertium, æquatur ſolido facto ex primo in quartum, & contra, ſi ſolidum ſolido æquatur, erit vt baſis ad baſin, ita altitudo & altitudinem *propoſ. 34. lib. 11. Euclid.*

Problema XIII.

Datam rectam terminatam, duobus punctis vtcunque ſectam, ita denuo ſecare & rectangula duo, ſub ſegmentis quibuſlibet duobus punctis datis, & inuento terminatis, datam inter ſe teneant rationem.

Sit data recta AB, ſecta punctis C, D, iterumque ſecanda, primum in alterutro ſegmento extremo, vt

D*B*, atque hinc triplex exiſtit caſus. Primus, (poſito E puncto quæſito,) vt ſit ratio CED rectanguli, ad *B*EA rectangulum, qualis data R ad S.



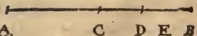
Sit hoc factum, punctumque inuentum E, & erit rectangulum CED æquale duobus, ſcilicet, ED quadrato & ED in CD. ergo BEA, æquale ei quod oritur, ſi applicentur ſolida ex S in ED quadratum, & in ED in CD ipſi R, eſt autem illud BE in EA, id eſt BD in DE minus ED quadrato, plus BD in DA. minus DE in DA ergo ex præmiſſo principio, ſolida ex S in ED quadratũ, & ex S in ED in DC, æqualia erunt ſolidis ex R in *B*D in DE minus R in ED quadratum, plus R in. *B*D in DA, minus R in DE in DA. & ęqualium proſaphæreſi, S in ED quadratum plus S in ED in DC, plus R in ED quadratum, plus R in DE in DA, minus R in *B*D in DE, æquabuntur R in *B*D in DA: erit igitur vt S plus R in ED, plus S in DC plus R in DA minus *B*D, ad R in *B*D, ita DA ad DE. quæ proinde dabitur per lemma noſtrum analyticum.

*E*go hoc exemplo, ad ſyntheſin tibi præibo, tu in reliquis, ſi vis, imitare.

Compoſitæ ex R & S, applicentur rectangula, S in DC, *R* differentiam DA, *B*D, & compoſitæ ex latitudinibus ortis, ſit æqualis K. tum eidem compoſitæ ex *R*S, applicetur rectangulum *R* in *BD*, & latitudini ortiuæ ſit æqualis L. tum rectangulo ex L in DA, ſit æquale quadratum M. dataque M media, & K differentia

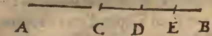
rentia extremarum, inueniantur extremæ, quarum minori ſit æqualis DE. dico E eſſe punctum quæſitum. quoniam enim rectangulum ex DE in compoſitam ex K & DE, eſt æquale quadrato M, id eſt rectangulo ex L in DA ex conſtructione, erit vt compoſita ex K & DE ad L, ita DA ad DE. atqui vt compoſita ex k & DE, ad L, ita rectangulum ſub compoſita ex R & S, & cõpoſita ex k & DE, ad rectangulum ſub compoſita ex eiſdem R, S, & L, id eſt ita aggregatum ex S in DC, R in differentiam DA, & BD, & compoſita ex RS in DE, ad R in BD. & ex præmiſſo principio aggregatum S in DC in DE, R in differentiam DA & BD in DE, compoſita ex R, S, in DE quadratum, æquabitur R in BD in DA. & æqualium proſaphæreſi aggregatum S in CD in DE, S in DE quadratum, æquabitur R in BD id DA minus R in differentiam DA, BD in DE, minus R in DE quadratum. & ex eodem principio, erit DC in DE, plus DE quadrato, id eſt DE in CE. ad BD in DA minus differentia DA, BD in DE, minus DE quadrato, id eſt ad BE in EA, (eſt enim DA ſi maior fuerit ipſa DB, æqualis ipſi DB ſimul cum earundem differentia, vnde ſublata differentia & DE, relinquetur EB.) vt R ad S. quod erat demonſtrandum. Cæterum analyſeos ratio habenda eſt, ſi DB ipſa DA maior, ſiue minor, ſiue ipſi æqualis fuerit. hic enim poſuimus maiorem.

Secundus caſus ex hoc epitagmate eſſe poteſt, quum ita iubetur data recta ſecari in E, vt ſit rectangulum AED, ad rectangulum BEC vt R ad S.



Sit factum: eritque AED rectangulum æquale DE quadrato, plus AD in DE, & BEC rectangulum ęquale DB in DB, minus DE quadrato, plus CD in DB, minus CD in DE. eſt autem vt R ad S, ita DE quadratum, plus AD in DE, ad rectangulum quod oritur ex applicatione S in DE quadratum, plus S in AD in DE ipſi R; ex præmiſſis ergo, S in DE quadratum, plus S in AD in DE, applicatum ipſi R, ęquabitur DB in DE, minus DE quadrato, plus CD in DB, minus CD in DE, & S in DE quadratum, plus S in AD in DE, æquabitur R in DB in DE, minus R in DE quadratū, plus R in CD in DB minus R in CD in DE, & ęqualium proſaphęreſi S in DE quadratum, plus S in AD in DE, minus R in DB in DE, plus R in DE quadratum, plus R in CD in DE. ęquabitur R in CD in DB. ergo vt S plus R in DE, plus S in AD, plus R in CD, minus R in DB, ad CB in DB. ita R ad DE, quæ propterea dabitur.

Reliquus caſus ex eodem epitagmate eſt, vt ſit ratio rectanguli BED, ad rectangulū AEC, qualis data R ad S.



Sit factum: & erit illud æquale BD in DE, minus DE quadrato. hoc autem æquale AD in CD, plus CD in DE, plus AD in DE, plus DE quadrato. vt autem R ad S ita DB in DE, minus DE quadrato, ad id quod oritur ſi applicetur S in DB in DE minus S in DE quadratum ipſi R. & ex præmiſſis erit s in DB in DE minus DE quadrato, ęquale R in AD in CD, plus R in CD in DE, plus R in AD in DE, plus R in DE quadratum.

Et ęqualium proſaphæreſi, S in DB in BE, minus S in DE quadratum, minus R in CD in DE, minus R in AD in DE minus R in DE quadratum, ęquale erit *R* in AD in CD, igitur vt S in DB minus S plus *R* in DE, minus R in CD, minus R in AD, ad AD in CD, ita R ad DE, quæ proinde vt prius, dabitur.

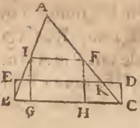
Atqui totidem orientur caſus, ex duobus reliquis ἐπιτάγματα, ſi nimirum iubeatur ita ſecari data recta in intermedio ſegmento, ſiue ita augeri, quibus eodem modo ſatisfieri poteſt. ſed hæc ſatis ſunt ad vſum lemmatis noſtri tyronibus manifeſtandum, qui inde petant ſingulorum caſuum, quum Syntheſes, tum determinationes, quæ quidem ex applicationibus ſponte ſeſe offerunt.

Hæc Apollonij Pergæi Problemata, ad determinatam ſectionem ſpectantia, extincta, reſuſcitauit vir acutus & ingenioſus Villebrodus Snellius, qui etiam non minus fœliciter, & quæ ad ſpatij & rationis ſectiones eodem fato interiere, reſtituit. ſed meſſis quam & ego ex eiuſdem agri cultura feci, hic tibi copiam libens facio.

Problema XIIII.

IN dato triangulo parallelogrammum rectangulum inſcribere, æquale dato. oportet autem rectangulum datum, ſemiſſe dati trianguli maius non eſſe.

Sit datum triangulum ABC, datúmque rectangulum EBCD, cuius latus ED, ſecet dati trianguli latus alterutrum, vt AC, in K puncto. tum rectangulo ACK, fiat æquale rectangulum AFC, ducaturque recta FI, parallela baſi BC, & demittantur perpẽdiculares in baſin IG, FH, dico rectangulum IG HF, eſſe æquale dato, EBCD.



Eſt enim ex conſtructione AC ad AF, vt FC ad Ck. vt autem AC ad AF, ita BC ad IF, & vt FC ad Ck, ita FH ad DC, ergo vt BC ad IF, ita FH, ad DC. & rectangulum BC in DC, rectangulo IF in FH æquale: quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

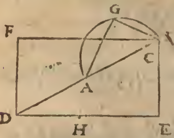
Hinc patet maximum inſcriptum rectangulum, æquale eſſe ſemiſſi ipſius trianguli, nam quoniam rectangula AFC, ACk, æqualia ſunt, maximum autem rectãgulum ſub ſegmẽtis ipſius AC, eſt quadratum dimidij ſegmẽti, id eſt rectangulum ſub tota AC, & quarta eiuſdem parte, vt autem AC ad Ck, ita tota perpendicularis a vertice trianguli A, ad baſim BC, eſt ad rectam DC, ſi igitur DC æqualis fuerit quartæ parti perpendicularis, ſecabitur AC in F, bifariam & æqualiter, eſt autem rectãgulum ſub tota baſe in quartam partem perpẽdicularis, æquale dimidio totius trianguli.

Problema XV.

Datis exceſſibus diametri parallelogrammi rectanguli, ſupra latera inæqualia, inuenire latera.

Sint dati exceſſus AB, CB, & ſuper rectam AB, deſcribatur ſemicirculus AGB, in quo coaptetur recta AG, ipſi AC æqualis, & ducatur recta GB. tum data GB media, & ipſius CB dupla, differentia extremarũ inueniau-

tur extremæ, quarum maior ſit BE. tum ex BE & compoſita ex BE & AC, id eſt DE, fiat rectangulum DFBE, quod dico eſſe quæſitum.



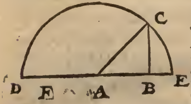
Eſt enim ex cõſtructione, quadratum GB, æquale rectangulo ſub BE, & BE minus duplo ipſius CB, id eſt quadrato ipſius BF, minus BE in CB bis. eſt autem GB quadratum, æquale quadrato AB, minus AG vel AC quadrato, id eſt CB quadrato, plus rectangulo bis ſub CB, CA, ergo BE quadratum minus BE in CB bis, æquale erit CB quadrato, plus CB in CA bis. & additis vtrinque æqualibus (nempe BE in CB bis) BE quadratum, æquabitur CB quadrato, cum quatuor rectangulis, duobus ſub CB, BE, & totidem CB, CA, ſed BE vel HE bis (facta nempe HE ipſi BE æquali) cum AC vel DH bis, (eſt enim ex conſtructione, DE æqualis compoſitæ ex BE, vel HE & AC.) eſt dupla ipſius DE. ergo quadratum BE æquale eſt rectangulo, ſub dupla ipſius DE, & BC, vna cum BC quadrato, id eſt rectangulo ſub compoſita ex DE dupla cum BC, & BC. addatur commune quadratum DE, eruntque quadrata BE, DE, id eſt BD quadratum, æquale rectangulo ſub compoſita ex DE dupla cũ BC, & BC, ſimul cum DE quadrato. ſed quadratũ BD, eſt æquale rectangulo ſub BC, & compoſita ex CB, & dupla ipſius CD, vna cum quadrato ipſius CD: erit itaque DC, ipſi DE æqualis, & CB exceſſus diametri ſupra maius latus DE: atqui AC differentia exceſſuum, æqualis eſt ipſi DH, ex conſtructione. ergo DA reliqua, re-

liquæ HE, id eſt BE, æqualis erit. & AB, exceſſus eiuſdem diametri ſupra minus latus BE. eſt itaque DF BE rectangulum quæſitum. quod erat demonſtrandum.

Problema XVI.

Dato exceſſu diametri quadrati, ſupra latus eiuſdem, inuenire latus.

Sit datus exceſſus AB, cuius duplo æqualis fiat FB, eique ad angulum rectum addatur BC, ipſi BA æqualis. tum data FB differentia extremarum, & BC media, inueniantur extremæ, quarum maior DB lateri quæſito erit æqualis.



Eſt enim quadratum AB vel BC, id eſt rectangulum DB in BE, vel DF, cũ rectangulo DB in FB, æquale quadrato DB. & AB quadratum bis, cum rectangulo DB in FB bis, æqualia DB quadrato bis, ſed AB quadratum bis, eſt æquale CA vel AD quadrato & DB in FB bis, eſt ęquale FB quadrato ſemel, plus FB in DA bis. (eſt enim FB in BD ſemel, æquale FB quadrato ſemel, plus FB in DF, deinde idem quoque æquale eſt, FB in DA & FB in AB, vel AF: ſed FB in AF, plus FB in DF eſt FB in DA.) ergo DA quadratum, plus FB quadrato ſemel plus FB in DA bis, id eſt quadratum cõpoſitæ ex DA, FB, eſt æquale DB quadrato bis, & eſt DB latus quadrati cuius compoſita ex DA, FB eſt diameter, & FA vel AB differentia diametri, & lateris. quod erat faciendum.

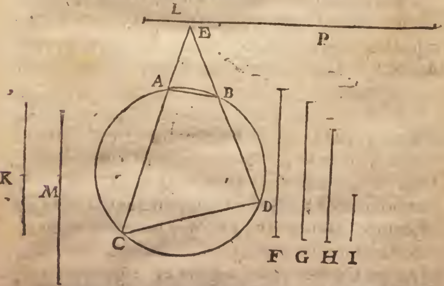
Problema XVII.

DAtis quatuor rectis, quarum tres vtcunque ſumptæ reliciá ſint maiores, ex quatuor datis, quadrilaterum circulo inſcriptibile conſtruere, id eſt cuius bini anguli oppoſiti, æquentur duobus rectis.

Si vel omnes quatuor, vel duæ ſaltem, inter ſe fuerint æquales, conſtructio facilis erit, ſi enim primum, fiat quadratum: ſin alterum, fiat vt differentia duarum inæqualiũ ad minorem, ita æqualium altera, ad aliam, quæ crus erit triãguli Iſoſcelis, ſupra minorem vt baſim, extra circulum conſtituti, cuius trianguli crura, ſi datis æqualibus augeantur, fiet quęſitum. ſed ſint rectę AB, AC, CD, DB, omnes inæquales. ſitque factum: & occurrant duæ CA, DB, extra circulum in E. eritque vt CD ad AB, ita EC ad EB, & ita ED ad EA, & propterea quoque vt CD ad AB, ita compoſita ex EC, ED, ad compoſitam ex EB, EA. & diuidendo, vt differẽtia CD, AB ad AB, ita differentia compoſitæ ex EC, ED, & compoſitæ ex AE, EB, id eſt compoſita ex CA, BD datis ad compoſitam ex AE, EB, quę propterea dabitur: ergo & compoſita quoque ex CE, EB: eſt autem vt CD ad AB, ita CE ad EB, dabitur igitur EB. ergo & tota ED, & reliqua EA, totaque CE.

Componetur autem ſic. ſint quatuor datæ rectæ F, G, H, I, omnes inter ſe inæquales, ſumaturque quæuis maiorum nimirum G, cum minima I, fiatque vt differẽtia earumdem ad minimam I, ita compoſita ex reliquis duabus F, & H, ad aliam rectam, quæ ſit K: hæc compo-

natur cum reliquarum altera vt F,ſitque compoſita P, L. tum fiat vt eadem G ad I, ita huius compoſitæ vltimæ vnum ſegmentum P,ad reliquum L. iungaturque hoc ſegmentum cum vltima relicta H, ſitque compoſita ipſi M æqualis,at eadem ablata à compoſita priore relinquat P. tum poſita recta CD, ipſi G ęquali centro D, interuallo rectę M, deſcribatur arcus circuli, & centro C,interuallo rectę P,alius priorem interſecans in *E* puncto,tum in rectis CE,DE,ſumantur ſegmenta,AC,*BD*, ipſis F,H æqualia,& connectatur recta A*B*. dico quadrilaterum ACD*B* eſſe quæſitum.



Quoniam enim ex cōſtructione, eſt vt differentia rectarum G & I, ad minorem I,ita rectæ F,H,ſimul.i AC, *BD* ſimul,ad k, i. AE, EB ſimul erit & cōponendo vt G ad I,ita CE, *ED* ſimul, ad AE,EB ſimul, atqui vt eadem G ad,I ita P ad L,id eſt A*E*,pars ad *E*B partem : ergo & reliqua quoque *DE*,ad reliquam A*E* erit,vt tota *CED*

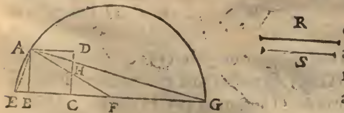
ad

ad totam A*EB*, id eſt vt G ad I. & quoniam eſt vt C*E* ad *EB*, ita *DE* ad *E*A, ſimilia erunt triangula *CED*, *BE*A, punctaque A,*B*,C,D, in circulo. & vt *CE* ad *EB*, ita G, id eſt CD, ad A*B*: erit igitur A*B* ipſi I ęqualis, & quadrilaterum quęſitum C A B D. quod erat faciendum.

Problema XVIII.

DAto quadrato, a quouis angulorum rectam educere, quæ cum latere ſubiacente producto, & latere oppoſito, triangulum rectangulum extra quadratum conſtituat, quod ad quadratum datum teneat rationem.

Sit datum quadratum A*B*CD, ratioque data R ad S. fiat vt R, ad compoſitam ex R & S, ita *B*C latus quadrati, ad rectam AF, quę ab angulo A educta, ſecet latus B C productum, in F. tum centro F, interuallo FA, ducatur circulus *E*AG, & agatur recta AG, quam dico problema efficere.



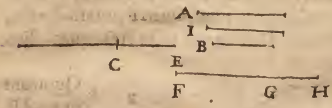
Quoniam enim eſt R ad R & S ſimul, vt *B*C ad FA, id eſt vt ABCD quadratum, ad rectangulum ſub A*B*, AF. eſt autem ABCD quadratum æquale trapezio AECH, (ducta nimirum AE) ſunt enim triangula A E B, A H D æqualia, quibus addito communi trapezio ABCH, fit quadratũ ABCD, æquale trapezio AECH, & rectangulum ſub AB

AF, eſt æquale triangulo AEG. ergo vt R ad R S ſimul, ita trapezium AE CH, ad triangulũ AEG: & diuidendo vt R ad S ita trapezum AECH, id eſt quadratum A B CD. ad triangulum HCG, quod erat faciendum.

Problema XIX.

DAtam rectam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, et vno ſegmentorum, ad alterius ſegmenti quadratum, datam teneat rationem.

Sit data recta DE, data ratio A ad B, inter quas media proportionalis ſit I, dataque I mediâ & A differentia extremarum, inueniantur extremæ FH, GH. tum fiat vt FG ad GH, ita DC ad CE. eritque rectangulum DEC, ad quadratum CD, vt A ad *B*.

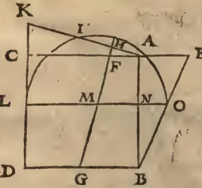


Eſt enim rectangulũ FHG, æquale quadrato I, atqui vt A ad *B*, ita A quadratum ad I quadratum, id eſt FG quadratum (ponitur enim FG ipſi Æqualis) ad I quadratum, id eſt ad rectangulum FHG, vt autem FG ad GH, ita DC ad CE: & componendo vt FH ad HG, ita DE ad EC, & conuertẽdo vt FH ad FG, ita DE ad DC: æquales ergo ſunt rationes FH ad FG & HG ad FG, rationibus DE ad DC, & CE ad CD: ſed ex illis compoſita eſt ratio FHG rectanguli, id eſt I quadrati, ad FG quadratum, id eſt A quadratum,

ex iſtis vero compoſita eſt ratio DEC rectanguli, ad DC quadratum, ergo vt FG vel A quadratum, ad FHG rectangulum, vel I quadratum, id eſt vt A recta ad B rectam, ita DC quadratum ad DEC rectangulum, quod erat faciendum.

ALITER.

Sit data recta A*B*, ſuper quam cõſtruatur quadratum ABDC, ſitque ratio data AB ad AE, quæ conuectantur ad angulum rectum EAB, cui ſubtendatur recta EB. tum diuidantur rectæ CE, DB, bifariam in punctis G, F, per rectam GF extenſam quantumlibet in H, & a puncto A in rectam G F H, ducatur perpendicularis AHIK, quæ producta concurrat cum latere DC protenſo, in K puncto. ſintque AH, HI, æquales, tum rectangulo AKI, fiat æquale quadratum KL, & per L punctum, ducatur recta LMNO, ipſis DB, CA parallela, ſecans rectas CD, GF, BA, BE, in punctis L, M, N, O. dico rectam AB ſectam in N, vt iubetur. Quoniã enim recta G M F, ſecat rectas CE, DB bifariam, ſecabit quoque bifariã rectas omnes ipſis CD, BE, terminatas, & parallelas ipſis DB CE, qualis eſt LMNO ex prædemonſtratis, & rectangulo AKI, æquale eſt quadratum KL, erunt puncta L, I, A, O. in circulo cuius centrum M, & diameter LMNO, quæ quoniã perpendicularis eſt ipſi AB, erit quadratum AN, rectangu-



lo LNO ęquale. ſed rectangulum LNO, ad rectangulum LNB, ſiue ABN, eſt vt NO ad NB: ergo & quadratum AN, ad rectangulum ABN, erit vt NO, ad NB, ideſt AE ad AB, quod erat faciendum.

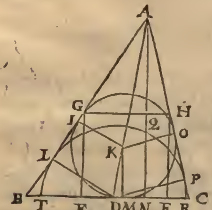
Problema XX.

D*Atis circulo, ſemicirculo, & quadrato, quæ eidem triangulo inſcribi poſſunt, inuenire triangulum cui ea inſcribantur.*

Sit datus circulus cuius ſemidiameter KI, ſemicirculus cuius ſemidiameter DL, & quadratum EGHF. ſitque factum & triangulum quæſitum ABC. & ad puncta contactuum L,I,O,P, ſint ductæ ſemidiametri DL, KI, DP, KO, & connectantur puncta DA, KA. quoniam igitur anguli KIA, KOA, recti ſunt, lateraque KI, KO, ęqualia, & latus KA, commune, erunt anguli IAK, OAK, æquales eodemque modo & anguli LAD PAD æquales recta igitur linea eſt per pũcta DKA. ſint iam ductæ KM, AN, perpendiculares in ipſam BC: eritque vt DL ad KI, ita DA ad AK & conuertendo DL ad differentiam DL & IK, vt DA ad DK, ideſt vt AN ad KM. datur autem KM, dabitur igitur & AN perpendicularis. ſecet iam recta AN rectam GH in Q. & quoniam eſt FC ad FH, vt QH ad QA, & BE ad EG vel FH, vt GQ ad QA, erunt FC, BE ſimul, ad FH vel GE, vt GQ, QH ſimul id eſt FH ad QA. & quadratum FH datum, ęquale rectangulo ſub QA & compoſita ex BE, FC, datur autem QA, dabitur igitur compoſita ex BE, FC, & propterea tota baſis BC. & quoniam ſunt BM, BI, IA, AO, CO, CM, binę ſumptę inter ſe ęquales: erunt CB, IA ſimul, æquales ſemiſſi

perimetri tranguli ABC,& rectangulũ ſub kM,& BC, IA ſimul, ęquale erit rectangulo, ex AN in *B*C ſemiſſem: dabitur igitur IA. eſt autem IA ad AL, vt Ik ad LD. quare dabitur etiam AL, rectaque DA. datur autem *B*C magnitudine & poſitione, quare & latera A*B*, AC dabuntur, totumque triangulum *ABC*.

Componentur autem hoc modo. fiat vt differentia duarum LD, *I*k, ad maiorem LD, ita KM ad AN. ſitque AQ differentia ipſarum HF, AN. tum rectis AQ, HF, inueniatur tertia proportionalis, quæ compoſita cum recta HF vel EF æqualis ſit baſi BC. tum fiat vt KM ad ſemiſſem baſeos, ita AN ad aliam, ex quâ ſublata BC baſe, relinquatur AI. & ſit vt Ik ad LD, ita AI ad AL. tum quadratis AL, LD, ſit æquale quadratum AD. & cētro D, interuallo DL, ducatur ſemicirculus TPR. productâque baſe quantumlibet, à puncto A ducantur tangentes ALB, APC, occurrentes baſi productæ in pũctis *B*, C, eritque triangulum ABC, quæſitum.



Eſt enim ſemicirculus datus TLPR inſcriptus ex conſtructione. & quoniam dantur AL, AI, ducatur à puncto I, recta Ik, parallela ipſi LD, occurrenſque rectæ AD in k puncto. quia igitur erat vt DL, ad circuli inſcribēdi ſemidiametrum ta LA, ad IA, erit IK æqualis ſemidiamento dicti circuli

Sit iam à puncto K, ducta perpendicularis KM. quoniã ergo eſt vt LD, ad differentiam LD & Ik, ideſt vt DA ad DK, ita AN ad kI; ex conſtructione, erunt KM, kI æquales, & circulus ex centro K, interuallo kM, vel kI. deſcriptus, tanget rectas AB, BC, in punctis I, M. & recta AC, tangens ſemicirculum TLPR tanget quoque eundem circulum ex centro k, eſt enim vt DA ad Ak, ita DP ad eiuſdem ſemidiametrum KO: quare & circulus datus eidem triangulo eſt inſcriptus. ſunt iam AI, AO, CM, CO, BD, BI, binæ ſumptæ, inter ſe æquales, igitur CM, BM, AI, ſimul id eſt BC, AI, ſimul, æquales erunt ſemiſſi perimetri trianguli ABC, rectangulum igitur ex KM in BC, AI ſimul, æquale eſt rectangulo ex AN in BC ſemiſſem, & BC baſis, æqualis inuentæ. eſt autem ex conſtructione AQ ad GH, vt GH ad BE, FC ſimul, & propterea AQ, GH ſimul, id eſt AN ad compoſitam ex GH, BE, FC, id eſt ad BC, eſt vt AQ ad GH. ergo GH, æqualis eſt lateri quadrati dati. eſt itaque ABC triã- gulum quęſitum. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Eodem modo data baſe, perpendiculo, & aggregato laterum, inuenietur triangulum dabitur enim diameter ſemicirculi, triangulo quæſito inſcriptibilis, quia rectã- gulum ſub dimidio aggregati laterum dato, & ſemidiametro dicti ſemicirculi, æquatur areæ trianguli, ſeu rectangulo dato ſub perpendiculari & baſis dimidio, dabitur etiam diameter circuli, eidem triangulo inſcriptibilis, ſi quidem rectangulum ſub ſemiſſe perimetri dicti

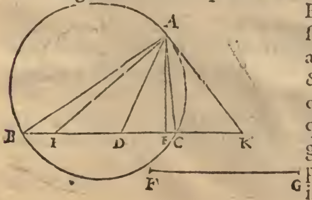
trianguli dato, & ſemidiametro circuli inſcriptibilis, æquatur eidem areæ, ſiue rectangulo dato, vnde praxis & demonſtratio eadem quæ ſupra.

Problema XXI.

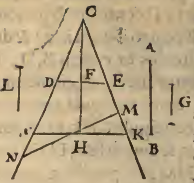
DAta baſe trianguli, perpendiculo, & recta a vertice in baſin, angulum verticis bifariam ſecante, inuenire triangulum.

Si perpendicularis, rectæ à vertice in baſin, angulum verticis bifariam ſecante, æqualis fuerit, triangulũ erit Iſoſceles, cuius datur baſis & altitudo: quare hunc caſum iure omittimus.

Sed ſint inęquales, dataque baſis FG, perpendicularis à vertice in baſin AE, quæ in quamuis rectam, vt pote BCK, perpendiculariter incidat in E puncto. Sitque AD ab A educta, ſecanſque rectam BCk, in D, ęqualis rectæ ſecanti angulum verticis bifariam. fiat angulo DAE, æqualis angulus DAI. tum rectæ AI perpendicularis ſit AK, in A puncto, occurratque rectæ BC productę in K. tum data AK mediâ, & FG differentia extremarum, inueniantur extremę BkC, ducanturque rectę AB, AC dico triangulum ABC eſſe quæſitum.



Eſt enim ex cõſtructione, BC æqualis datę FG. & quoniã quadratum Ak, æquale eſt rectãgulo BKC, erũt puncta B, A, C in circulo quem



Quoniam enim ex conſtructione eſt G recta, media proportionalis inter CF, FD. & vt CF ad G, ita CH ad AB. eſt autem & CF ad FD, vt CH ad HI: erat itaque & recta AB media proportionalis inter CH, HI: & quadratum AB, rectangulo Iſoſceli CIk ęquale. eſt etiam ex conſtructione NC ad CI, vt CI vel Ck ad CM, ergo, triangula NCM, ICk, æqualia erunt: & eſt differentia laterum NC, CM æqualis rectæ L ex conſtructione, eſt itaque triangulum NCM quæſitũ. quod erat faciendum.

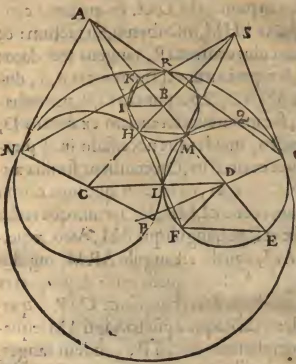
Problema XXIII.

D*Atis tribus circulis ſeſe contingentibus, inuenire quartum qui tres datos contingat.*

Generaliter hoc abſoluit Franciſcus Vieta in Apollonio ſuo Gallo, at ſpecialem doctrinam, quia ſpeciali dignam tractatum indicauit, eam tibi hîc ſubijcio.

Sint tres circuli quorum centra C, B, D, ſeſe omnes primum exterius contingentes in punctis H, L, M, & ſit factum. tangat ſcilicet circulus ex centro P, tres datos in punctis N, R, O. & per centra D, B, C, B, agantur rectæ DBA, CBS. & per pũcta L, H, agatur recta LHA, occurrẽs rectę DBA productæ in A puncto. Secetque eadẽ circulos, B, D, iterum in punctis I, F. ducanturque rectæ kI,

HM,ML,FE. (producta nempe recta BD, donec iterum ſecet circumferentiam circuli ex D centro, in E puncto, & eadem ſecet circulum ex B centro iterum in K) & ducatur recta ARQO, ſecans circulos ex centris B,D, in punctis R,Q,O. quoniam igitur circulus B, circulum C tangit (ducta recta CLD) erunt triangula æquicrura BIH,CHL, ſimilia, ſimiliter & triãgula CHL,DLF, ſunt ergo lineæ BI,CLD, parallelæ, & anguli IBk, LDM, æquales, itemque IK,LM, & HM, FE parallelæ. ergo & anguli IkA,LMA ęquales erunt, ſed IkA eſt æqualis ipſi IHM. triangula igitur LMA, AHM ſunt ſimilia, eritque AL ad AM vt AM ad AH. & quadratũ AM rectãgulo LAH æquale: ergo AN tangens à puncto A, erit æqualis ipſi AM. & eſt AE ad AM, vt FE ad HM, hoc eſt LM ad kI, & vt LM ad KI, ita AM ad AK, ergo vt AE ad AM, ita AM ad Ak, & quadratum AM rectangulo EAk erit quoque æquale. ſed rectangulo EAk æquale eſt rectangulum OAR (eſt enim AE ad AO, vt AQ ad AM, & AQ ad AM, vt AR ad Ak. ergo erit AO ad AE, vt AK ad AR, & rectangulum OAR rectangulo EAK æquale) & propterea recta AN, ipſi AM æqualis, circulum quoque ex centro P tanget. tangebat autem & circulum ex C centro, eſt ergo N punctum contactus vtriuſque circuli quorum cẽtra C,P. eodemque modo & OS recta, ęqualis ipſi SH oſtendetur circulos quorum centra DP, tangere in O, puncto contactus vtriuſque circuli.

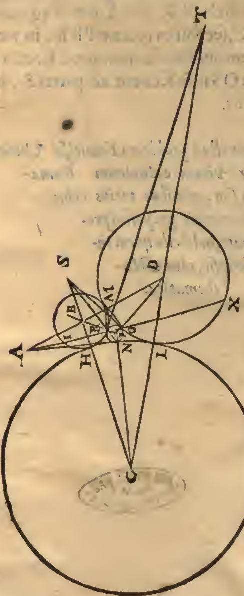


Hinc oblatis tribus circulis C,B,D ſeſe exterius cõtingentibus, inuenietur centrũ quarti P, tres datos intra ſe contingentis. per centra enim D, B, C, B, agantur rectę DBA, CBS, & per puncta contactuum L, H, L, M, rectæ LHA, LMS. tũ rectis AM, SH, fiant ęquales AN, SO, tangentes circulos C, D, vt oſtenſum eſt in punctis N, O. ducanturque rectę NC, OD, coeuntes in P, centro circuli quęſiti. Sunt enim vt oſtenſum eſt puncta N, O, in quibus quęſitus circulus, datos C, D, tangit, eſt itaque P centrum quæſitum.

Eodemque modo, ſi oblatis circulis quorum centra P, D, B, quęratur quartus cuius centrum C, τῷ ἀρβήλῳ KOM, inſcribendus. reperiatur vt prius punctum A, fiatque AN ipſi AM ęqualis. tum ducatur recta NRS, cui occurrat OS in S puncto, tangens circulos ex centris D, P, in O puncto. & ducatur recta SBC, ſecans ductam rectam NP, in C centro circuli quęſiti: erunt enim ex demonſtratis SO, SH æquales: rectęque SBC, NCP in circuli quæſiti centro ſeſe interſecabunt.

Sunto iterum dati circuli quorum centra C, B, D, ſeſe

exterius tangentes in punctis H,L,M. & quęratur centrum quarti τῶ ἀρϐήλω LHM, inſcribendi, Sit factum: & inſcriptus circulus cuius centrum P, tangens tres datos in punctis N, O, R. reperiantur vt prius puncta A, S, ducanturque rectæ AN, SO, & per puncta O, R, protrahatur recta ORIA, ſecans circumferentiam ex centro D, iterum, in X puncto, incidetque neceſſario in A punctum, quoniam per contactus, OR tranſiens, ſimilia auferet ſegmenta XO, OR, RI, ex circulis quorum centra D, P, B. agantur iam rectæ KI, MR, MO, eruntque rectæ KI, MO parallelæ vt ſupra, anguli que AKI, AMO, æquales, ſed angulus AKI, æqualis eſt angulo ARM, angulus igitur ARM, angulo AMO æqualis erit: & propterea AO ad AM, vt AM ad AR. & rectangulum OAR, quadrato AM æquale: recta itaque à pũcto A ipſi AM æqualis, incidens in peripheriam circuli P, eundem tanget, tangit autem & circulum ex C centro (vt ſupra demonſtrandum eſt,) eſt itaque recta AN ipſi AM æqualis. eodemque modo oſtendetur & SO æqualis ipſi SH.



Hinc oblatis iterũ circulis CBD, inuentiſque punctis A, S, ſi fiat AN æqualis ipſi AM, & SO æqualis ipſi SH, tangentes circulos C, *D*, in punctis N, O, ducaturque rectę CN, DO ſeſe interſecantes in P, erit punctum P centrum quæſitũ ſic oblatis circulis quorum centra C, D, P, inuenietur cẽtrum circuli B, tres datos contingẽtis. Inueniatur enim vt dictum eſt T punctum, & ipſi TL fiat æqualis TR, quę incidet in punctum cõtactus circulorum P, B (quod eodem prorſus modo demõſtrari poteſt, quo oſtenſum eſt rectas AN, SO. tangere circulos ex centris C, P, D.) ducaturque PRB. tum actâ OS, in ipſam DP perpendiculariter incidente in O puncto, ei

occurrat recta per puncta N, R, in S, à quo ſi agatur recta SC, ad centrum C, ſecabit ea rectam PRB, in B centro quæſito, vt ex demonſtratis liquet. quod ſi recta per puncta N, R rectam OS non ſecuerit ad partes S, problema impoſſibile erit.

Et hoc ἀμοιβαῖον erat illud problema Franciſci Vietæ, ad clariſſimum virum Adrinum Romanum, pro ſuo, omnibus totius orbis Mathematicis propoſito problemate, in libello quem inſcripſit, idea Mathematica.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE